

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

School of Management and Law

MSc Banking and Finance

2015 – 2017

Masterthesis

Pricing von exotischen Optionen im Heston Modell

Eine praktische Anwendung anhand der Finite-Differenzen-Methode

Vorgelegt von:

Rafael Umbricht

11-494-291

Referent:

Dr. Norbert Hilber, ZHAW

Korreferent:

Dr. Simon Rentzmann, ZHAW

ZHAW, Frühlingssemester 2017, Winterthur, im Mai 2017

Wahrheitserklärung

„Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Mithilfe Dritter verfasst habe, dass ich alle verwendeten Quellen sowie alle verwendete Literatur angegeben habe, dass ich das Vertraulichkeitsinteresse des Auftraggebers wahren und die Urheberrechtsbestimmungen der Hochschule Luzern bzw. der Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften respektieren werde.“

Name des Studierenden (Druckbuchstaben)

RAFAEL UMBRICH

Unterschrift des Studierenden

.....

Herausgabeerklärung des Dozierenden

Dozent Dr. Norbert Hilber

Student Rafael Umbricht

Herausgabe¹ der Masterarbeit «Pricing von exotischen Optionen im Heston Modell»

Die vorliegende Masterarbeit wird:

- ☐ nicht herausgegeben.
- ☐ nicht herausgegeben werden bis ins Jahr:
- ☐ für eine uneingeschränkte Herausgabe freigegeben.

Winterthur,

(Ort, Datum)

.....

(Unterschrift des Dozierenden)

¹ Unter "Herausgabe" wird sowohl die Einsichtnahme im Hause wie auch die Ausleihe bzw. die Abgabe zu Selbstkostenpreisen verstanden.

Management Summary

Die Entwicklung des Black-Scholes-(Merton)-Modells liegt bereits mehr als 40 Jahre zurück. Trotzdem ist es nach wie vor unbestritten, dass dieses Modell einen bahnbrechenden Meilenstein im Bereich des Derivativpricings darstellt. Nichtsdestotrotz verfügt es auch über zahlreiche Defekte. Einer davon ist die Annahme, dass die Volatilität eines Basiswertes über die Laufzeit eines Derivates konstant ist. An diesem Punkt setzte Heston (1993) an und entwickelte ein Modell, welches die Volatilität eines Basiswertes, genauso wie den Verlauf des Basiswertes selber, stochastisch modelliert. Sein Modell, welches zwar nicht die erste Überlegung in dieser Hinsicht darstellt, bildet, vor allem aufgrund der Tatsache, dass es für einfache Derivate über eine analytische Lösung verfügt, ein Benchmark-Modell im Bereich der stochastischen Volatilitätsmodelle.

Die vorliegende Masterthesis setzt sich zum Ziel, einen Barrier Reverse Convertible mit Hilfe dieses Heston Modells zu bewerten und zu testen, ob mit ebendiesem Modell adäquatere Bewertungen, i.e. Bewertungen näher an Marktpreisen, resultieren, als mit dem Black-Scholes-(Merton)-Modell. Da das Heston Modell für die Bewertung eines Barrier Reverse Convertibles über keine analytische Lösung verfügt, wird das Vorhaben anhand der Finite-Differenzen-Methode umgesetzt. Diese Methode wird in der vorliegenden Arbeit anhand des Black-Scholes-(Merton)-Modells aufgearbeitet und schlussendlich auf die Problemstellung des Heston Modells angewandt. Zusätzlich zur theoretischen und praktischen Erarbeitung der Finite-Differenzen-Methode wird in dieser Arbeit die Kalibrierung des Heston Modells behandelt. Die finale Bewertung des Barrier Reverse Convertibles sowie herkömmlicher Put Optionen erfolgt mit Hilfe von eigens codierten Matlab Routinen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das Heston Modell konsistent adäquatere Resultate liefern kann, als das Black-Scholes-(Merton)-Modell. Dabei wurde die Adäquanz hauptsächlich anhand von herkömmlichen Put Optionen getestet, da für diese Tests Marktopionspreise benötigt werden, die für klassische Optionen einfacher verfügbar sind, als für Barrier Reverse Convertibles. In der zentralen Analyse dieser Arbeit wird gezeigt, dass das Heston Modell bei 23 von 26 analysierten Put Optionen Resultate näher an den Marktpreisen liefert, als das Black-Scholes-(Merton)-Modell. Eine weitere zentrale Analyse zeigt, dass die implizierten Volatilitäten in den Modellbewertungen des Heston Modells

eine durchaus adäquate Replizierung des Volatilitäts-Smiles von Marktoptionspreisen bilden können. Allerdings benötigt die Bewertung eines Barrier Reverse Convertibles, welche nicht mehr analytisch berechnet werden kann, deutlich mehr Rechenleistung und damit Zeit, als dies beim Black-Scholes-(Merton)-Modell der Fall ist. Diese Zeitdauer von zwei bis sechs Minuten pro Barrier Reverse Convertible kann allerdings durch Optimierung der Methode noch optimiert werden.

Aus einer finalen Analyse von Erweiterungen des Heston Modells geht schlussendlich hervor, dass ebendiese Erweiterungen den Fit der Modellbewertungen zu den Marktoptionspreisen, vor allem für eher kurzfristige Derivate, noch deutlich verbessern können. Diese Masterthesis bildet demnach ein solides Fundament im Bereich der stochastischen Volatilitätsmodellierung für die Bewertung von Aktienoptionen. Für die effektive Einsetzbarkeit des Modells auf echten Märkten ist es allerdings ratsam, Erweiterungen des Modells, wie beispielsweise zeitabhängige Parameter im klassischen Heston Modell oder das Double Heston Modell, zu verwenden, um noch adäquatere Resultate zu erhalten.

Inhaltsverzeichnis

Wahrheitserklärung	I
Herausgabeerklärung des Dozierenden	II
Management Summary	III
Inhaltsverzeichnis	V
Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis	IX
Abkürzungsverzeichnis	X
Notationenverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
1.1 Ausgangslage	1
1.2 Problemstellung	2
1.3 Zielsetzung & Fragestellung	2
1.4 Abgrenzungen & Definitionen	3
1.5 Forschungsdesign	5
2 Theoretischer Hintergrund.....	6
2.1 Theorie der Derivativpreisbewertung	6
2.1.1 Derivativpricing in den frühen Jahren	6
2.1.2 Das BSM und seine Erweiterungen	7
2.1.3 Übersicht über modernes Derivativpricing	8
2.2 Fundamentale Konzepte in der Theorie	9
2.2.1 Stochastische Prozesse	9
2.2.2 Derivativpreis als Erwartungswert einer Zufallsvariable	11
2.2.3 Risikoneutrale Bewertungen	12
2.3 Das Konzept des Heston Modells	13
2.3.1 Die SDE im Heston Modell	13
2.3.2 Die PDE im Heston Modell	15
3 Die Finite-Differenzen-Methode.....	16

3.1	Die Finite-Differenzen-Methode im BSM	16
3.1.1	Die PDE und ihre Spezifikationen im BSM	17
3.1.2	Approximation der Ableitung nach dem Basiswertpreis	18
3.1.3	Approximation der Ableitung nach der Zeit	21
3.2	Anwendung der Finite-Differenzen-Methode im BSM	23
3.2.1	Nicht-Konstante Koeffizienten	23
3.2.2	Anwendungsbeispiel im BSM.....	25
3.2.3	Konvergenzanalyse im BSM.....	28
3.3	Die Finite-Differenzen-Methode im Heston Modell	29
3.3.1	Approximation der Ableitungen nach dem Preis und der Varianz	31
3.3.2	Approximation der Ableitung nach der Zeit	35
3.3.3	Erweiterung der Randbedingungen	36
3.3.3.1	Intrinsische Randbedingungen	36
3.3.3.2	Randbedingung zweiter Ordnung	38
3.3.4	Anwendungsbeispiel im Heston Modell	39
3.3.5	Konvergenzanalyse im Heston Modell	41
4	Pricing eines Barrier Reverse Convertibles	44
4.1	Definition eines konkreten BRC	44
4.2	Zerlegung des BRC in Einzelteile.....	45
4.3	Kalibrierung der Modelle.....	46
4.3.1	Kalibrierung des BSM.....	47
4.3.2	Kalibrierung des Heston Modells.....	51
4.4	Bewertung des BRC.....	54
5	Analyse & Vergleich der Resultate	57
5.1	Vergleich von Modellbewertungen mit Marktpreisen	57
5.2	Volatilitäts-Smile	60
5.3	Analyse der Geschwindigkeit	64
5.4	Schlussfolgerungen	65
6	Alternative Lösungsansätze und Modellerweiterungen	66
6.1	Alternative Lösungsansätze	66
6.1.1	Modifikationen der Finiten-Differenzen-Methode	66

6.1.2	Monte-Carlo-Methoden.....	67
6.2	Modellerweiterungen	68
6.2.1	Zeitabhängige Parameter im Heston Modell.....	69
6.2.2	Double Heston Modell	70
6.2.3	Sprung-Erweiterungen	70
6.2.4	Modellierung der Zinskomponente	71
7	Fazit	72
7.1	Kritische Würdigung des Heston Modells	72
7.2	Schwachstellen dieser Arbeit	73
	Literaturverzeichnis	i
	Anhang.....	iii
	Matlab Routinen	iii
	Black-Scholes Europäischer Call (closed form)	iii
	Black-Scholes Europäischer Put (closed Form).....	iii
	Black-Scholes Europäischer Call (Finite-Differenzen-Methode).....	iii
	Black-Scholes Europäischer Put (Finite-Differenzen-Methode)	iv
	Black-Scholes Down-and-In Put (Finite-Differenzen-Methode).....	iv
	Black-Scholes BRC (Finite-Differenzen-Methode).....	iv
	Black-Scholes Europäischer Put Kalibrierung.....	v
	Black-Scholes Europäischer Put implizierte Volatilität.....	v
	Heston Modell Europäische Optionen generell (closed Form).....	vi
	Heston Modell Europäischer Call (Finite-Differenzen-Methode)	vii
	Heston Modell Europäischer Put (Finite-Differenzen-Methode)	ix
	Heston Modell Down-and-Out Put (Finite-Differenzen-Methode)	xi
	Heston Modell BRC (Finite-Differenzen-Methode).....	xii
	Heston Modell Europäischer Put Konvergenzanalyse.....	xiii
	Matlab Codes zur Generierung von Abbildungen.....	xvi
	Factsheet des BRC.....	xviii
	Marktoptionspreise	xx

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Illustrative Darstellung des Produktgitters	22
Abbildung 2: Preis- und Auszahlungsfunktion einer europäischen Put Option	27
Abbildung 3: Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im BSM	29
Abbildung 4: Derivatивpreis einer europäischen Put Option im Heston Modell	41
Abbildung 5: Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell	43
Abbildung 6: Auszahlungsfunktion eines BRC	46
Abbildung 7: Vergleich Modell- und Marktpreise zur Kalibrierung im BSM	49
Abbildung 8: Vergleich Modell- und Marktpreise zur Kalibrierung im Heston Modell	53
Abbildung 9: Derivatивpreise einer Down-and-Out Put Option im Heston Modell	55
Abbildung 10: Plain Vanilla Marktpreise im Vergleich mit den Modellbewertungen ..	60
Abbildung 11: Volatilitäts-Smile Markt- und Modellpreise (T=15. Dezember 2017) ..	63
Abbildung 12: Volatilitäts-Smile Markt- und Modellpreise (T=15. Juni 2018)	63

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Auflistung von Modellen des modernen Derivativpricings	8
Tabelle 2: Testparameter für die Finite-Differenzen-Methode im BSM.....	25
Tabelle 3: Testresultate der Finiten-Differenzen-Methode im BSM.....	26
Tabelle 4: Konvergenzanalyse der Finiten-Differenzen-Methode im BSM	28
Tabelle 5: Testparameter für die Finite-Differenzen-Methode im Heston Modell	39
Tabelle 6: Testresultate der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell	40
Tabelle 7: Konvergenzanalyse der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell ...	43
Tabelle 8: Produktspezifikationen des BRC auf ABBN	44
Tabelle 9: Modellparameter zur Bewertung des BRC im BSM.....	50
Tabelle 10: Modellparameter zur Bewertung des BRC im Heston Modell	53
Tabelle 11: Bewertungen des BRC im Heston Modell und im BSM.....	56
Tabelle 12: Modellbewertungen von Plain Vanilla Put Optionen.....	58
Tabelle 13: Implizierte Volatilitäten von Markt- und Modellpreisen:	61
Tabelle 14: Zeitdauer für die Berechnung adäquater Resultate im Heston Modell	64
Tabelle 15: Marktoptionspreise für die Kalibrierung der Modelle	xx

Abkürzungsverzeichnis

ADI	Alternative Direction Implicit (Schema)
BRC	Barrier Reverse Convertible
BSM	Black-Scholes-(Merton)-Modell
CEV	Constant Elasticity of Variance (Modell)
CHF	Schweizer Franken
CS	Craig-Sneyd (Schema)
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (Modell)
gBB	Geometrische Brownsche Bewegung
LIBOR	London Interbank Offered Rate
PDE	Partielle Differenzialgleichung
SDE	Stochastische Differenzialgleichung
SNB	Schweizerische Nationalbank
SVSP	Schweizerischer Verband für strukturierte Produkte
ZHAW	Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Notationenverzeichnis

Derivativbezogene Notationen

t	Zeitpunkt
T	Laufzeit
τ	Restlaufzeit
S_0	Initialer Basiswertpreis
S_t	Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt t
K	Ausübungspreis
g	Auszahlungsfunktion eines Derivates
D	Dividendenzahlung (Betrag)
q	Stetige Dividendenrendite
σ	(Initiale) Volatilität eines Basiswertes
μ	Drift-Wert, Erwartungswert eines Basiswertes
r	Risikoloser Zinssatz
V	«Fair Value» eines Derivates

BRC-spezifische Notationen

C^m	Kumulierte und abgezinste Couponzahlungen
n	Ratio
$Nominal$	Nominalwert
I^c	Diskrete Zufallsvariable

B Barriere

Statistische Notationen

d kleinste Veränderung

W_t Standard Wiener Prozess

Z Zufallszahl

$N(0,1)$ Standardnormalverteilt

\mathbb{E} Erwartungswert

$f(x)$ Beliebige Funktion für illustrative Zwecke

Spezifische Notationen im BSM

x Logarithmierter Basiswertpreis

a, b, c Stellvertretende Funktionen für die Koeffizienten in der PDE

α, β, γ Koeffizienten im Theta-Verfahren zur Lösung der PDE

Spezifische Notationen im Heston Modell

$\sqrt{v_t}$ Zum Mittelwert zurückkehrende stochastische Volatilität

v Stochastisch modellierte Varianz

κ Rückkehrgeschwindigkeit der Varianz zum Mittelwert

θ Langzeitvarianz

σ_{HM} Volatilität der Varianz

ρ Korrelationskoeffizient

a, b, c, d, e, f Stellvertretende Funktionen für die Koeffizienten in der PDE

$M_f^{(x)}$	Koeffizientenmatrix der Ordnung x zur Funktion $f(x)$
${}_s^i M_f^{(x)}$	Koeffizientenmatrix der Ordnung x zur Funktion $f(x)$ mit intrinsischen Randbedingungen i am linken Rand sowie Randbedingungen zweiter Ordnung s am rechten Rand
M_f	Blockmatrix zur Funktion $f(x)$
η	Notation als zusammenfassende Schreibweise für die fünf Parameter

Spezifische Notationen der Finite-Differenzen-Methode

u	Funktion als Lösung einer PDE
ω	Approximation der Funktion u
w_j	Lösungsvektor, respektive Lösungsmatrix
G	Finiten-Differenzen-Gitter
h	Maschenweite im Basiswertpreisintervall in G
N	Anzahl Gitterpunkte (Ableitung nach S) im Intervall G
k	Maschenweite im Zeitintervall in G
M	Anzahl Gitterpunkte (Ableitung nach t) im Intervall G
j	Maschenweite im Volatilitätsintervall in G
L	Anzahl Gitterpunkte (Ableitung nach v) im Intervall G
θ_{FD}	Theta-Faktor in der Finiten-Differenzen-Methode
I	Einheitsmatrix

1 Einleitung

Bei dem vorliegenden Dokument handelt es sich um eine Masterthesis im Studiengang Banking & Finance an der Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften [ZHAW] zum Thema «Pricing von exotischen Optionen im Heston Modell». Diese Arbeit ist in sieben Kapitel gegliedert wobei der Inhalt ebendieser im Abschnitt 1.5 erläutert wird.

1.1 Ausgangslage

Es ist einige Zeit vergangen seit Black, Scholes und Merton mit der Einführung ihres Black-Scholes-(Merton)-Modells [BSM] einen Meilenstein im Bewerten von Finanzderivaten gelegt haben (vgl. Black & Scholes, 1973; Merton, 1973). Trotz der Tatsache, dass das BSM aus heutiger Perspektive einige Defekte aufweist, wurden Merton und Scholes 1995 mit dem Nobelpreis für ihre Arbeit in den 1970er Jahren ausgezeichnet (Hull, 2012, S. 299). Der Nobelpreis, welcher mehr als 20 Jahre nach der Veröffentlichung an die zwei noch lebenden Autoren verliehen wurde, Black war zu diesem Zeitpunkt leider bereits verstorben (Hull, 2012, S. 299), zeigt die Wichtigkeit, welche der Einführung des BSM zugemessen wird.

Die angesprochenen Defekte sind der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Teneng (2011, S. 100 ff.) benennt unter anderem drei zentrale Annahmen, welche die Grenzen des BSM deutlich machen und die auf echten Märkten nicht beobachtbar oder zumindest umstritten sind. Dazu zählt die Annahme, dass die Volatilität über die Laufzeit eines Derivates konstant ist. Dasselbe gilt für den risikolosen Zinssatz. Daneben benennt er die Annahme der Normalverteilung für die Renditen des Basiswertes als grösste Schwäche des BSM. Die weiteren kritischen Annahmen seien hier der Vollständigkeit halber auch erwähnt. Sie drehen sich um die Dividendenzahlungen, die Annahme eines Random Walks als Basis der Kursentwicklung des Basiswertes, Transaktionskosten, Optionstypen (nur europäische Optionen werden berücksichtigt) sowie die perfekte Liquidität der Märkte (Teneng, 2011, S. 100 ff.).

Diese Defekte, respektive Limitierungen des BSM wurden in den verschiedensten Weisen in den letzten gut 40 Jahren angegangen. Dabei wurden für die verschiedenen Defekte

verschiedene Lösungen präsentiert. Die vorliegende Arbeit nimmt sich konkret der Annahme der konstanten Volatilität eines Basiswertes über die Laufzeit eines Derivates an. Dafür werden in der Praxis häufig Basiswertmodelle verwendet, welche eine stochastische Modellierung der Volatilität zulassen. Hull & White (1987) stellten auf Basis von existierenden Theorien als eine der Ersten eine konkrete Lösung für die Verwendung einer stochastisch modellierten Volatilität im Bereich des Derivativpricings vor. Ihre Lösung verwendet dabei eine Korrelation zwischen der Volatilität und dem Preis des Basiswertes. Sie stellte einen grossen Schritt in Richtung Lösung des Problems dar. Allerdings war die Berechnungsmethode noch nicht marktfähig, da sie exzessive numerische Rechenleistung benötigte (Heston, 1993, S. 328). Heston (1993) seinerseits lieferte daraufhin ein Modell, welches eine closed form Lösung (geschlossene Lösung) zur Bewertung von europäischen Call Optionen liefert. Sein Modell beinhaltet, analog zu Hull & White (1987), eine Korrelation zwischen dem Preis des Basiswertes und seiner Volatilität (Heston, 1993, S. 328). Das Heston Modell gilt auch heute noch, teilweise auch unter Verwendung von diversen Erweiterungen, als Benchmark Modell im Bereich der stochastischen Modellierung der Volatilität in der Praxis (Hilber, 2016a, S. 32).

1.2 Problemstellung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Problem, ein konkretes strukturiertes Produkt zu bewerten. Dabei soll im Gegensatz zur geometrisch Brownschen Bewegung [gBB], welche dem BSM zugrunde liegt (Glasserman, 2003, S. 4), ein Modell verwendet werden, welches der Tatsache, dass die Volatilität über die Laufzeit eines Derivates nicht konstant ist, gerecht wird. Dafür wird in der vorliegenden Arbeit ein Basiswertmodell verwendet, welches eine stochastische Modellierung der Volatilität zulässt. Konkret wird dabei das oben erwähnte Heston Modell verwendet.

1.3 Zielsetzung & Fragestellung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Barrier Reverse Convertible [BRC] anhand des Heston Modells zu bewerten. Dafür bedarf es einem praxisorientierten Ansatz, welcher entsprechend marktfähige Resultate liefern kann. Dieser Ansatz ist dabei selbstständig zu codieren. An diesen Ansatz werden zwei Hauptanforderungen gestellt. Zum einen soll

das Modell adäquate Resultate liefern. Adäquat bedeutet in diesem Kontext, dass das Modell in sich und mit dem Markt stimmige Resultate liefern soll. Dafür werden die berechneten Bewertungen von Derivaten im Heston Modell mit Bewertungen mit dem BSM sowie mit Marktpreisen verglichen. Daraus wird gefolgert, ob die gesteckten Anforderungen an die Adäquanz zur Zufriedenstellung erreicht wurden. Somit wird als Forschungsziel definiert, dass die Bewertung eines BRC anhand des Heston Modells konsistent bessere Resultate, das heisst Resultate näher an Marktpreisen, liefern soll, als das BSM.

Daneben wird ein besonderes Augenmerk auf die praktische Einsetzbarkeit gesetzt. Diese wird anhand der Geschwindigkeit gemessen, welche im Wesentlichen durch die benötigte Rechenleistung bestimmt wird.

1.4 Abgrenzungen & Definitionen

Unter einem Derivat wird in dieser Arbeit ein Finanzprodukt verstanden, welches sich aus einem Basiswert ableitet (Bodie, Kane, & Marcus, 2013, S. 46). Die vorliegende Arbeit konzentriert sich dabei auf Aktien als Basiswerte und vernachlässigt andere mögliche Instrumente wie Zinsen, Rohstoffe, Obligationen et cetera. Des Weiteren können Derivate grundsätzlich nach ihrer Art unterschieden werden. So gibt es neben den Optionen, auf welche sich diese Arbeit fokussiert, auch Futures (Bodie et al., 2013, S. 46). Diese werden in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt.

Klassischerweise wird für die Bewertung eines Finanzderivates das herkömmliche BSM verwendet. Hierzu sei die Entwicklung des Basiswertpreises im BSM als stochastische Differenzialgleichung [SDE] wie folgt definiert (Hirsa, 2013, S. 10):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Gegeben durch Itô's Lemma hat diese SDE gemäss Hirsa (2013, S. 10) eine eindeutige Lösung:

$$S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T}$$

mit

$$W_T = \sqrt{T} Z$$

wobei

$$Z \sim N(0,1)$$

Da wir uns für diese Vorabdefinition bereits in einem risikoneutralen Umfeld befinden, findet sich der Drift-Parameter μ weder im obigen BSM noch im nachfolgenden Heston Modell wieder. Diese Thematik wird im Kapitel 2 dieser Arbeit noch weiter ausgeführt.

Der Vollständigkeit halber sei nachfolgend auch das Heston Modell in seinen Grundzügen analog dem BSM definiert. Gemäss Hirsa (2013, S. 12) ist die Entwicklung eines Basiswertpreises im Heston Modell anhand folgender SDE definiert:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_{HM} \sqrt{v_t} dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

Bei $W_t^{(1)}$ und $W_t^{(2)}$ handelt es sich um zwei Brownsche Bewegungen, welche mit dem Faktor $\rho \in [-1, 1]$ korreliert sind (Hirsa, 2013, S. 12).

Die Notation $\sqrt{v_t}$ stellt dabei die stochastisch modellierte Volatilität dar. Es wird im Heston Modell sichergestellt, dass die stochastisch modellierte Volatilität des Basiswertes nicht negativ werden kann (Hirsa, 2013, S. 12). Diese Bedingung wird im Kapitel 2.3.1 im Detail aufgegriffen. Die Parameter $r, \kappa, \theta, \sigma_{HM}, \rho$ sind in diesem Modell konstant. Zu beachten gilt es, dass es sich weder beim obigen Modell, noch beim BSM um ein Modell, welches Dividenden miteinbezieht, handelt. Dieser Thematik wird im Kapitel 2.3 Rechnung getragen und spielt für den Überblick und die Definition keine Rolle.

Für die SDE im Heston Modell gibt es im Vergleich zum BSM keine eindeutige Lösung, was ein approximatives Verfahren notwendig macht, um entsprechende derivative Produkte zu bewerten (vgl. Hirsa, 2013, S. 13; Heston, 1993, S. 333; Glasserman, 2003, S. 121).

Für den Fortlauf dieser Arbeit wird hiermit definiert, respektive abgegrenzt, dass die Problemlösung ausschliesslich durch den Einsatz der Finite-Differenzen-Methode angegangen wird. Dies bedeutet, dass andere Methoden, wie beispielsweise Monte-Carlo-Methoden, in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

1.5 Forschungsdesign

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit wird in diesem Abschnitt kurz erklärt. Nachdem die Ausgangslage sowie Problem- und Fragestellungen im ersten Teil erläutert wurden, folgt im zweiten Kapitel die theoretische Erarbeitung der Hintergründe im Bereich des Derivativpricings und des Heston Modells im Speziellen. Dabei werden auch die fundamentalen Konzepte hinter den verschiedenen Basiswertmodellen, insbesondere hinter dem Heston Modell beleuchtet. Im dritten Kapitel wird die Finite-Differenzen-Methode erarbeitet. Dies erfolgt in einem ersten Schritt anhand des BSM und in einem zweiten Schritt anhand des Heston Modells. Dieser Teil dient als theoretische Grundlage für die nachfolgende Bewertung eines BRC. Dieser wird zu Beginn des vierten Kapitels definiert und in ebendiesem Kapitel analysiert und bewertet. Ebenfalls wird im vierten Kapitel die Kalibrierung an Marktpreise der Modelle beschrieben. Die in Kapitel 4 erhaltenen Resultate werden daraufhin in Kapitel 5 ausgewertet und mit Marktpreisen sowie mit dem BSM verglichen. Ein Grossteil der Auswertungen in diesem Kapitel erfolgen anhand von Plain Vanilla Optionen, da diese mit effektiven Marktpreisen und closed form Lösungen verglichen werden können. Im Kapitel 6 erfolgt eine kurze Abhandlung zu Methoden- und Modellerweiterungen in Bezug auf das Heston Modell. Zum Schluss folgt in einem Fazit die kritische Würdigung des Heston Modells sowie die Beantwortung der zu Beginn definierten Fragestellung. Daneben werden die Schwachstellen der vorliegenden Arbeit eruiert.

2 Theoretischer Hintergrund

In diesem Kapitel wird der theoretische Hintergrund im Bereich des Derivativpricings detailliert aufgearbeitet. Dabei wird als erstes ein kurzer Ausflug in die historische Derivatibewertung unternommen. Darin werden die fundamentalen Entwicklungen in diesem Bereich analysiert. Zusätzlich wird in der Tabelle 1 ein Überblick über die gängigsten Modelle im Derivativpricing gegeben. In einem zweiten Teil werden die wichtigsten theoretischen Hintergründe, welche dem Derivativpricings zugrunde liegen aufgearbeitet. Es handelt sich dabei einerseits um die stochastischen Prozesse, mit Hilfe welcher Basiswerte modelliert werden und um die Konzepte Derivativpreise als Erwartungswerte von Zufallsvariablen sowie risikoneutrale Bewertungen. Zusätzlich folgt eine konzeptionelle Einführung in das Heston Modell.

2.1 Theorie der Derivativpreisbewertung

In diesem Teilkapitel folgt eine kurze Aufarbeitung der Geschichte des Derivativpricings. Sie geht zurück bis in die frühen Jahre, welche grundsätzlich als die Jahre vor dem BSM bezeichnet werden. Danach folgt eine theoretische Aufarbeitung über die Einführung des BSM und seine Erweiterung. Aus den Schwächen des BSM werden dann die Weiterentwicklungen bis hin zum modernen Derivativpricing analysiert.

2.1.1 Derivativpricing in den frühen Jahren

Jarrow (2010, S. 1331) benennt die Dissertation von Bachelier von 1900 als Grundstein des Derivativpricings. Dieser verwendete einen Ansatz, der dem Ansatz des BSM stark ähnelt, allerdings unter der Verwendung von normalverteilten Aktienrenditen (Jarrow, 2010, S. 1331). Mehr als ein halbes Jahrhundert später griff Samuelson dieses Thema wieder auf und legte dem Derivativpricing eine gBB zugrunde. In seinem Modell folgten die abgezinsten Derivativauszahlungen einem Martingal (Jarrow, 2010, S. 1332). Wiederrum einige Jahre später brachten Samuelson und Merton die Nutzenmaximierung der Investoren ins Spiel und ersetzten gleichzeitig die effektiven Wahrscheinlichkeiten durch risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten (Jarrow, 2010, S. 1332). Diese frühen Pricing-Formeln basierten allerdings noch immer auf den erwarteten Renditen und Risikoprämien der Basiswerte, was ihre Anwendung erschwerte. Der möglicherweise grösste Schritt und damit die Entgegnung der grössten Kritik an den bisherigen Errungenschaften war die

Einführung der Argumentationen des risikolosen Hedgings sowie der No-Arbitrage Argumentation (vgl. Kapitel 2.2.3). Diese wurden erstmals von Black und Scholes (1973) sowie Merton (1973) eingeführt.

2.1.2 Das BSM und seine Erweiterungen

Nachdem das BSM eingeführt wurde, wurde die Forschung in diesem Bereich intensiviert. Wichtig zu erwähnen ist in diesem Kontext die Einführung des ersten und zweiten fundamentalen Asset Pricing Theorems durch Delbaen und Schachermayer. Das erste Theorem besagt, dass die No-Arbitrage Kondition gleichzusetzen ist mit der Anwesenheit eines risikolosen Wahrscheinlichkeitsmasses. Das zweite Theorem besagt, dass ein Markt nur dann vollkommen sein kann, wenn das risikolose Wahrscheinlichkeitsmass einmalig ist. Diese beiden Theoreme ermöglichten die vollumfängliche Verwendung der stochastischen Calculus im Derivativpricing (Jarrow, 2010, S. 1332).

Das BSM basiert grundsätzlich auf fünf zentralen Annahmen. Es handelt sich um (i) vollkommene Märkte, (ii) freie Märkte ohne Transaktionskosten und Restriktionen, (iii) Aktienpreise die einer gBB folgen, (iv) deterministische Zinssätze und (v) die Abwesenheit von Kreditrisiko (Jarrow, 2010, S. 1332). Die Annahmen (i) bis (iii) wurden bald darauf intensiv angegangen. Hauptsächlich erwähnenswert sind in den Folgejahren die Forschungen im Bereich der Jump und Jump-Diffusion Prozesse, die die Annahme der gBB relativierten. Des Weiteren wurden als Erweiterungen der dritten Annahme Ende der 1980er und Anfang der 1990er Jahre stochastische Volatilitätsmodelle, zu welchen dasjenige von Heston gehört, vorgeschlagen (Jarrow, 2010, S. 1333). Später folgte die Einführung von Levy Prozessen (Jarrow, 2010, S. 1333). Erweiterungen im Bereich der zweiten Annahme gab es im Vergleich zu den obigen Erweiterungen mit dem Ziel die Annahme der gBB zu relativieren weniger, weswegen darauf nicht weiter eingegangen wird. Im Bereich der ersten Annahme ist vor allem die Forschung Anfangs der 1990er Jahre von Jarrow im Bereich des Einflusses von grossen Händlern, die die Marktpreise beeinflussen können, erwähnenswert. Diese Anomalien können prinzipiell als Liquiditätsrisiko betrachtet werden, bei welchem es sich wiederum um endogene Transaktionskosten handelt. Diese Thematik stellt ein aktuell heisses Forschungsthema dar (Jarrow, 2010, S. 1333).

Ein weiteres zentrales Thema der Forschung ist die Problemlösung innerhalb der diversen Modelle. Das BSM für europäische Optionen hat eine analytische Lösung und so haben es auch einige andere Modelle. Für wiederum andere Derivate und ihre Modelle existieren keine analytischen Lösungen mehr, wenn auch viel Forschungsaufwand darauf aufgewendet wird, dies zu ändern. Für analytisch nicht lösbare Probleme führt Jarrow (2010, S. 1334) kurz in binomiale Approximationen, Reihenentwicklungen, Finite-Differenzen und Monte-Carlo-Simulationen ein.

Neben den oben erwähnten Erweiterungen existieren diverse andere Weiterentwicklungen diverser Modelle auf die Bedürfnisse von Zinsderivaten sowie in den Bereich des Kreditrisikos. Diese beiden Themen sind für den weiteren Verlauf dieser Arbeit allerdings nicht relevant und werden daher nicht weiter behandelt.

2.1.3 Übersicht über modernes Derivatpricing

In diesem Teil folgt ein kurzer Überblick über die wichtigsten stochastischen Modelle zur Modellierung diverser Basiswerte. Die Übersicht in der nachfolgenden Tabelle 1 basiert auf den von Hirt (2013, S. 10 - 27) eingeführten Modellen.

Tabelle 1: Auflistung von Modellen des modernen Derivatpricings

Name des Modells	Fokus / Beschreibung	Erfinder
Black-Scholes-(Merton)-Modell	Ursprüngliches und weitverbreitetes Derivatpricingmodell, welches auf einer gBB basiert.	Black, Scholes, Merton
Local Volatility Modell	Modell mit einer Volatilität als Funktion der Zeit oder dem Basiswertpreis.	Derman, Kani
Heston Stochastic Volatility Modell	Basiswertmodell mit zusätzlicher stochastischen Modellierung der Volatilität.	Heston
Geometrische Brownsche Bewegung mit Mean Reversion	Ornstein-Uhlenbeck Prozess: Modellierung eines nicht-konstanten zum Mittelwert zurückkehrenden Drift-Terms.	Ornstein, Uhlenbeck
Vasicek Modell	Eine Anwendung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses für Zinsderivate.	Vasicek

Cox-Ingersoll-Ross Modell	Eine Anpassung des Vasicek Modells zur Verhinderung von negativen Zinssätzen.	Cox, Ingersoll, Ross
Variance Gamma Modell	Ein Jump Prozess, der den Sprüngen in der Volatilität gerecht wird.	-
CGMY Modell	Kombination aus reinen Diffusionsmodellen, wie beispielsweise dem BSM, mit reinen Jump-Ansätzen, wie beispielsweise dem Variance Gamma Modell.	Carr, Geman, Madan, Yor
Normal Inverse Gaussian Modell	Erweiterung des Variance Gamma Modells, in welchem die Veränderung von einem inversen Gamma Prozess bestimmt wird, was zu einer infiniten Variation führt.	Barndorff, Nielsen
Variance Gamma with Stochastic Arrival Modell	Kombination eines Variance Gamma Modells mit einer stochastischen Volatilitäts-Komponente.	Carr, Geman, Madan, Yor

2.2 Fundamentale Konzepte in der Theorie

Im nachfolgenden Teilkapitel werden drei Fundamente des Derivativpricings erläutert. Es handelt sich dabei einerseits um stochastische Prozesse und andererseits um die Konzepte Derivativpreise als Erwartungswerte von Zufallsvariablen sowie um die risikoneutrale Bewertung.

2.2.1 Stochastische Prozesse

Ein stochastischer Prozess ist definiert als eine Gleichung, die das probabilistische Verhalten einer stochastischen Variable beschreibt. Bei dieser wiederum handelt es sich um eine Variable, deren zukünftiger Wert unbekannt ist (Hull, 2012, S. 814). Stochastische Prozesse können dabei entweder als diskret oder kontinuierliche definiert sein. Bei diskreten stochastischen Prozessen können sich Variablen nur an fixierten Zeitpunkten ändern, wohingegen bei kontinuierlichen stochastischen Prozessen Veränderungen jederzeit stattfinden können (Hull, 2012, S. 280). Auf realen Märkten sind dabei nur diskrete Prozesse beobachtbar, da Basiswertpreise meistens eine minimale Änderung von beispiels-

weise einem Rappen aufweisen und die Börsen keine permanenten Öffnungszeiten aufweisen. Nichtsdestotrotz sind kontinuierliche stochastische Prozesse hilfreich für die spätere Bewertung von Derivaten (Hull, 2012, S. 280). Da der Entwicklung von Basiswertpreisen grundsätzlich ein Random Walk, sprich die zufällige Entwicklung von Basiswerten unabhängig von vorangegangenen Werten, zugrunde liegt, werden im Derivatpricing sogenannte Markov Prozesse verwendet. Markov Prozesse sind durch die Tatsache definiert, dass nur der aktuelle Wert einen Einfluss auf die zukünftige Entwicklung ebendieses Wertes hat und der historische Verlauf irrelevant ist (Hull, 2012, S. 280). Eine spezifische Form dieser Markov Prozesse sind die sogenannten Wiener Prozesse. Ein Standard Wiener Prozess, oft auch als Brownsche Bewegung bezeichnet, ist definiert als ein Prozess mit einem Mittelwert von 0 und einer Standardabweichung von 1 (Hull, 2012, S. 282). Es gilt folgende Schreibweise:

$$W_T = \sqrt{T} Z$$

wobei

$$Z \sim N(0,1)$$

Um die obigen Konzepte als Basiswertmodelle verwenden zu können, ist als erstes eine Generalisierung des Wiener Prozesses notwendig. Diese Generalisierung hat zur Folge, dass die ersten beiden Momente des Wiener Prozesses nicht mehr als 0, respektive 1 definiert sind, sondern jeden Wert annehmen können. Ein generalisierter Wiener Prozess für eine beliebige Variable x ist daher definiert als:

$$dx = a dt + b dz$$

Dabei handelt es sich bei a und b um Konstanten, die die ersten beiden Momente abbilden (Hull, 2012, S. 284). Bei dz handelt es sich um die Zufallskomponente. Für das weitere Vorgehen wird die Notation μ als Drift-Wert, sprich dem Mittelwert der Entwicklung des Wiener Prozesses, welcher oben den Wert 0 angenommen hat, eingeführt. Die Schwankungsintensität wird von nun an als σ bezeichnet. Es handelt sich dabei um die Standardabweichung des Prozesses, welche oben den Wert 1 angenommen hat (Hull, 2012, S. 284).

Angewandt als Prozess für einen Basiswertpreis S ist der generalisierte Wiener Prozess definiert als:

$$dS = \mu dt + \sigma dz$$

Der Wert des Basiswertes S muss dabei in die jeweiligen Terme des Prozesses einfließen, da die Komponenten μ und σ nicht per se als konstant anzunehmen sind, sondern im Verhältnis zum Basiswertpreis S als konstant angenommen werden müssen (Hull, 2012, S. 286 - 287). Bei μ handelt es sich dabei um die erwartete Rendite des Basiswertes S und bei σ um die Volatilität des Basiswertpreises S . Die Komponente dz stellt dabei einen Standard Wiener Prozess W_t dar. Daraus folgt, dass die SDE, welche dem BSM zugrunde liegt definiert ist als:

$$dS = \mu S dt + \sigma S W_t$$

Das obige Modell ist bekannt unter dem Namen gBB (Hull, 2012, S. 287). Um das eigentliche BSM zu erhalten muss das obenstehende Modell in ein risikoneutrales Umfeld transformiert werden. Dieses Konzept wird im nachfolgenden Kapitel 2.2.3 genauer erläutert. Nach dieser Transformation ist die BSM SDE für einen konkreten Zeitpunkt, unter Berücksichtigung von Dividendenzahlungen des Basiswertes, gegeben als:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Diese SDE hat dabei gegeben durch Itô's Lemma eine eindeutige Lösung (Hirsa, 2013, S. 10):

$$S_T = S_0 e^{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T}$$

2.2.2 Derivatpreis als Erwartungswert einer Zufallsvariable

Derivaten liegt fundamental die Tatsache zugrunde, dass die Erfüllung eines Vertrages, welcher einem Derivat zugrunde liegt, in der Zukunft liegt und dass der Wert des Basiswertes S dieses Kontrakts, respektive der Wert des Vertrages selber, somit unbekannt ist. Diese Tatsache bildet die Basis des Konzeptes, dass Derivatpreise als Erwartungswerte von Zufallsvariablen zu betrachten sind. Wie im obigen Kapitel 2.2.1 erläutert wurde, ist der Wert eines Basiswertes S zum Zeitpunkt t abhängig von zwei Komponenten. Dabei handelt es sich um den Drift-Term sowie den Zufallsterm. Der Drift-Term bestimmt dabei die durchschnittliche Entwicklung des Basiswertes S pro Zeitschritt (Hull, 2012, S. 804). Der Zufallsterm bestimmt sich durch die Volatilität σ sowie eine Zufallskomponente (Hull, 2012, S. 287). Zusammen ergeben diese am Beispiel einer gBB einen durch Zufall

generierten Pfad mit einem bestimmten Endwert, welcher ein Basiswert S am Ende eines Betrachtungszeitraums annehmen kann. Bei diesem Endwert handelt es sich wiederum lediglich um einen möglichen Endwert unter Vielen. Werden beliebig viele Pfade anhand der gBB generiert, ergibt sich auf der Seite der Endwerte wiederum eine Verteilung. Diese Verteilung ist ausschlaggebend für die Bestimmung des Erwartungswertes eines Basiswertes S . Da diese Verteilung durch die Ziehung von Zufallsvariablen generiert wird, wird generell von einem Erwartungswert von Zufallsvariablen gesprochen (vgl. Hirsa, 2013, S. 27). Um schlussendlich auf den Wert eines Derivates zu gelangen, muss dieser in das Konstrukt des Derivativertrages gepackt und zum risikolosen Zinssatz r (vgl. Kapitel 2.2.3) abgezinst werden.

Im Beispiel des BSM bedeutet dies, dass der Wert einer europäischen Option dem folgenden Erwartungswert entspricht:

$$V(S, t) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}g(S_T)|S_t = S]$$

Dabei steht $g(S_T)$ für eine bislang nicht näher spezifizierte Auszahlungsfunktion eines beliebigen Derivates.

Da es sich beim Heston Modell um ein stochastisches Volatilitätsmodell handelt, wird die obige Funktion um eine Variable erweitert. Somit entspricht der Erwartungswert einer europäischen Option im Heston Modell:

$$V(S, v, t) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}g(S_T)|S_t = S, v_t = v]$$

Das obige Konzept des Derivativerpreises als Erwartungswert einer Zufallsvariable sagt noch nichts über die Art der Modellierung des Basiswertes S aus und gilt prinzipiell für alle gängigen Modelle (Hirsa, 2013, S. 27).

2.2.3 Risikoneutrale Bewertungen

Ein weiteres grundlegendes Konzept des Derivativerpricings dreht sich um die risikolosen Bewertungen von Derivaten. Hull (2012, S. 257) erklärt, dass obwohl die Welt in der wir leben eine risikobehaftete ist, die Derivativerpreise in einem risikolosen Umfeld mit denjenigen in unserem echten Umfeld übereinstimmen, weswegen dieses Konzept zentral ist für die Bewertung von Derivaten. Es löst nicht nur das Problem der Findung der richtigen

Erwartungswerte von Basiswerten, sondern überlistet auch die Tatsache, dass jeder Investor seine persönliche Risikoaversion aufweist und wir so gut wie nichts über diese wissen (Hull, 2012, S. 257). Eine weitere Möglichkeit dieses Konzept zu betrachten beginnt bei der Präsenz der No-Arbitrage Annahme in der Modellierung eines Basiswertes, wie sie praktisch allen gängigen Modellen zugrunde liegt. Aus dem ersten fundamentalen Theorem des Asset Pricings ist bekannt, dass ein Markt nur dann arbitragefrei sein kann, wenn mindestens ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmass präsent ist (Hirsa, 2013, S. 27). Bei diesem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmass handelt es sich in der weiteren Anwendung dieses Konzepts um den stetigen risikolosen Zinssatz r . Dieser ersetzt in der Folge (i) den Erwartungswert, respektive den Drift-Term eines jeden Basiswertes und gilt (ii) als Diskontierungsfaktor (Hull, 2012, S. 257).

2.3 Das Konzept des Heston Modells

In diesem Teilkapitel wird das Heston Modell konzeptionell erarbeitet. Dafür wird neben der Einbettung des Heston Modells in die erarbeitete Theorie die partielle Differenzialgleichung [PDE] des Heston Modells eingeführt, um das Modell später anhand der Finite-Differenzen-Methode zu approximieren.

Die vorgängig erläuterten Konzepte gelten vollumfänglich für das Heston Modell. Dieses basiert grundsätzlich auf stochastischen Prozessen. Es handelt sich bei einem Derivatpreis, welcher anhand des Heston Modells berechnet wird, ebenso um einen (abgezinsten) Erwartungswert einer Zufallsvariable und auch dem Heston Modell liegt das Prinzip der risikoneutralen Bewertungen zugrunde.

2.3.1 Die SDE im Heston Modell

Die Entwicklung eines Basiswertes S im Heston Modell ist gegeben durch folgende SDE (vgl. Kapitel 1.4):

$$\begin{aligned}dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma_{HM} \sqrt{v_t} dW_t^{(2)}\end{aligned}$$

Der erste Teil des Heston Modells entspricht dabei exakt dem BSM mit dem Unterschied, dass die konstante Volatilität σ des BSM durch eine Variable ersetzt wurde, die ihrerseits

einem eigenen stochastischen Prozess folgt. Es handelt sich dabei um die zum Mittelwert zurückkehrende stochastische Volatilität $\sqrt{v_t}$. Die effektiven Erweiterungen des BSM befinden sich allesamt im zweiten Teil des Modells, der stochastischen Modellierung der Volatilität. Die zusätzlichen Parameter sind dabei gemäss Hirta (2013, S. 12) wie folgt zu interpretieren: Bei $W_t^{(2)}$ handelt es sich um den Wiener Prozess in der Modellierung der stochastischen Volatilität $\sqrt{v_t}$. Dieser Prozess ist dabei mit dem Faktor $\rho \in [-1, 1]$ mit dem Wiener Prozess des ersten Teils des Modells $W_t^{(1)}$ korreliert. Des Weiteren stellt θ die positive Langzeitvarianz des Basiswertes S dar. Bei κ handelt es sich um die Geschwindigkeit mit welcher die Varianz v_t zu seinem Mittelwert θ zurückkehrt. Da $\sqrt{v_t}$ zu seinem Mittelwert zurückkehren und nicht davon weglaufen soll, ist ein strikt positiver Wert für θ zwingend (Crisóstomo, 2014, S. 14). Schlussendlich stellt σ_{HM} die Volatilität der stochastischen Varianz v_t dar. Auch sie nimmt einen strikt positiven Wert an. κ , θ , σ_{HM} sowie ρ sind im Heston Modell genauso wie r , der risikolose Zinssatz, über die Laufzeit T konstant.

Aus ökonomischen Überlegungen muss das obige Modell sicherstellen, dass die stochastische Volatilität $\sqrt{v_t}$ keine negativen Werte annehmen kann. Der Basiswert S seinerseits kann im Grundmodell, welches dem BSM entspricht, keine negativen Werte annehmen, da die Renditen des Basiswertes S lognormal verteilt sind. Die Frage stellt sich allerdings nach der Sicherstellung von strikt positiven Volatilitäten $\sqrt{v_t}$ im Heston Modell, welche durch den zweiten stochastischen Prozess sichergestellt werden müssen. Bei der Modellierung der stochastischen Volatilität $\sqrt{v_t}$ handelt es sich um einen nach Cox, Ingersoll und Ross benannten CIR Prozess (Hilber, 2016a, S. 32). Feller, der diesen Prozess bereits 1951 studiert hatte, konnte zeigen, dass ein CIR Prozess nicht negativ werden kann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$2\kappa\theta > \sigma_{HM}^2$$

Diese Bedingung ist im allgemeinen als Feller Bedingung bekannt und stellt sicher, dass im Heston Modell die stochastische Volatilität $\sqrt{v_t}$ strikt positiv ist (Crisóstomo, 2014, S. 14-15).

2.3.2 Die PDE im Heston Modell

Die SDE im Heston Modell ist gegeben als:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_{HM}\sqrt{v_t}dW_t^{(2)}$$

Um ein Derivat mit Hilfe des Heston Modells zu bewerten, muss die obige SDE in eine PDE transformiert werden. Hirsu (2013, S. 147-148) verwendet dafür Itô's Lemma und erhält in einem risikolosen Umfeld folgende PDE:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma_{HM} v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma_{HM}^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} + \\ (\kappa(\theta - v)) \frac{\partial V}{\partial v} - rV - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

In dieser PDE, welche nach S , v , und t differenziert werden muss, können die diversen Modellparameter, insbesondere θ , κ und ρ aus Marktoptionspreisen geschätzt werden (Hirsu, 2013, S. 148). Des Weiteren sei erwähnt, dass in dieser PDE die stetige Dividendenrendite des Basiswertes q miteinbezogen wurde.

3 Die Finite-Differenzen-Methode

Der «Fair Value» V eines BRC im Heston Modell kann nicht mehr analytisch berechnet werden. Dies bedarf den Einsatz von Approximationsverfahren. In dieser Arbeit wird dafür die Finite-Differenzen-Methode verwendet. Dieses Verfahren soll in dieser Arbeit noch etwas näher erklärt werden, weswegen diese Methode vorgängig auf ein trivialeres Problem, als dem Heston Modell, nämlich dasjenige des BSM, angewandt wird.

Grundsätzlich ist das Konzept der Finiten-Differenzen-Methode als Verfahren zu bezeichnen, welches die Ableitungen in einer PDE durch Approximationen ersetzt (Hilber, 2016b, S. 96). Es existieren verschiedene Formen dieser Methode, wovon in dieser Arbeit die Unterscheidung zwischen dem expliziten und dem impliziten Verfahren sowie dem Crank-Nicolson Verfahren kurz erläutert werden soll. Das explizite Verfahren verwendet zur Approximation der Ableitungen in einer PDE lediglich Vorwärts- (Hirsa, 2013, S. 87), wohingegen das implizite Verfahren nur Rückwärtsdifferenzenquotienten verwendet (Hirsa, 2013, S. 89). Das Crank-Nicolson Verfahren, welches für die Ableitung nach der Zeit t eingesetzt wird, verwendet zentrale Differenzenquotienten, um bessere Approximationen zu erhalten (Hirsa, 2013, S. 92). Dabei ist das Crank-Nicolson Verfahren als Spezialfall des Theta-Verfahrens zu bezeichnen, in welchem $\theta_{FD} = 0.5$ gesetzt wird. Dies führt dazu, dass die Methode eine verhältnismässig gute Konvergenz erreicht, was in den Kapiteln 3.2.3 sowie 3.3.5 thematisiert wird.

3.1 Die Finite-Differenzen-Methode im BSM

Zu Illustrationszwecken wird die Finite-Differenzen-Methode anhand des BSM erklärt. Dafür werden die Ableitungen nach den verschiedenen Variablen, im BSM handelt es sich dabei um den Basiswert S und die Zeit t , gesondert, respektive sequentiell eingeführt. Des Weiteren wird das Modell mit einem logarithmierten Basiswertpreis x eingeführt. Dies dient dazu, dass die Koeffizienten im Modell konstant werden, was die Veranschaulichung anfangs vereinfacht. Dies funktioniert so allerdings nur im BSM, weswegen diese Vereinfachung bereits bei der Anwendung der Finite-Differenzen-Methode im BSM wieder verworfen wird und somit die Koeffizienten inkonstant werden.

3.1.1 Die PDE und ihre Spezifikationen im BSM

Als erstes wird für die Anwendung der Finiten-Differenzen-Methode eine PDE benötigt. Diese lautet für das BSM (Hirsa, 2013, S. 115):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dabei handelt es sich um eine PDE, welche nach S und t differenziert werden muss. Die Modellparameter, insbesondere die Volatilität des Basiswertes σ können dabei aus Marktoptionspreisen geschätzt werden. Dieses Modell beinhaltet die stetige Dividendenrendite des Basiswertes q .

Neben der Definition der zugrundeliegenden PDE bedarf es der Definition der Auszahlungsfunktion g . Diese lautet im BSM für ein beliebiges Derivat (Hirsa, 2013, S. 117):

$$V(S, T) = g(S)$$

Diese Auszahlungsfunktion g ist noch nicht auf der Ebene eines konkreten Derivates definiert, was zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht entscheidend ist.

Als nächstes wird der Basiswertpreis S in obiger PDE, wie eingangs erläutert, logarithmiert. Dafür wird

$$x = \ln(S)$$

gesetzt (Hilber, 2016b, S. 84), was bedeutet, dass der Basiswertpreis als $S = e^x$ gesetzt wird. Dies dient dazu, im Modell der Finiten-Differenzen-Methode nachfolgend konstante Koeffizienten zu erhalten, was die Darstellung der Methodik vereinfacht. Im Anschluss wird wieder auf konstante Koeffizienten verzichtet, womit der Basiswert S auch nicht mehr logarithmiert werden muss.

Aus der obigen Definition folgt, dass der Derivatpreis $V(S, T)$ durch $V(e^x, T)$ ersetzt wird.

Nun wird im Folgenden die Richtung der Zeit gedreht² und die Restlaufzeit des Derivates wird als $\tau = T - t$ definiert (Hilber, 2016b, S. 84). Daraus folgt eine erneute Ersetzung

² Dies führt dazu, dass in der Folge die Vorzeichen der Koeffizienten gedreht werden müssen.

des Derivatpreises durch die Notation $V(e^x, \tau)$. Der Derivatpreis V stellt in diesem Fall eine Funktion in Abhängigkeit zum logarithmierten Basiswertpreis x und der Restlaufzeit τ dar und wird nachfolgend u genannt:

$$u(x, \tau) = V(e^x, \tau)$$

3.1.2 Approximation der Ableitung nach dem Basiswertpreis

In einem ersten Schritt wird der Theta-Term, respektive die Ableitung der PDE nach der Zeit t , in der BSM PDE vorläufig ignoriert. Dies bedeutet, dass zu Beginn Finite-Differenzen, also Approximationen nur für die Ableitungen nach dem Basiswertpreis S , respektive x , verwendet werden.

Als Vereinfachung der PDE werden die Koeffizienten ebendieser entnommen und durch stellvertretende Funktionen ersetzt (Hilber, 2016b, S. 115):

$$a(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2$$

$$b(x) = -(r - q)x$$

$$c(x) = r$$

Daraus folgt in einem ersten Schritt eine neue Differenzialgleichung³, welche nur in Abhängigkeit zum logarithmierten Basiswertpreis x steht, ($u(x)$ steht dabei für eine beliebige Funktion):

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

Um das Problem wieder zu vervollständigen wird die Abhängigkeit nach der Zeit wieder in obiges Problem eingeführt. Daraus resultiert folgende PDE (Hilber, 2016b, S. 117):

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} u(x, t) + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} u(x, t) + b \frac{\partial V}{\partial x} u(x, t) + cu(x, t) = 0$$

Des Weiteren ist bekannt, dass die Funktion u bei Restlaufzeit $\tau = 0$ genau der entsprechenden Auszahlungsfunktion des Basiswertpreises e^x entspricht:

³ Da diese Differenzialgleichung nur von einer Variable abhängt, handelt es sich um eine gewöhnliche Differenzialgleichung und nicht um eine PDE (Hilber, 2016b, S. 117).

$$u(x, 0) = g(e^x)$$

Um die Methode der Finiten-Differenzen anwenden zu können, bedarf es zusätzlich der Definition von Randbedingungen. Dafür werden die unteren und oberen Werte der Funktion u in einem Intervall $G = [x_l, x_r]$ wie folgt definiert (Hilber, 2016b, S. 118):

$$u(x_l, t) = u_l(t)$$

$$u(x_r, t) = u_r(t)$$

Hilber (2016b, S. 118) definiert $u_l(t) = u_r(t) = 0$ (Nullrandbedingungen) als einfachste Wahl. Dies fördert ein neues Problem zutage und zwar, dass die Derivate an den Stellen x_l und x_r nicht einen Wert von 0 aufweisen. Daher wird die Funktion $u(x, t)$ mit einer alternativen Funktion $\omega(x, t)$ approximiert. Dies hat den Vorteil, dass das Problem überhaupt erst lösbar gemacht wird. Zusätzlich kann mit der Wahl des Intervalls G die Abweichung zwischen den Funktionen $u(x, t)$ und $\omega(x, t)$ für die relevanten Werte von x beliebig klein gehalten werden (Hilber, 2016b, S. 118).

Das zu lösende Problem stellt sich schlussendlich wie folgt dar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial V}{\partial t} \omega(x, t) + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \omega(x, t) + b \frac{\partial V}{\partial x} \omega(x, t) + c \omega(x, t) = 0 & \text{in } G \times]0, T] \\ \omega(x_l, t) = 0 & \text{in }]0, T] \\ \omega(x_r, t) = 0 & \text{in }]0, T] \\ \omega(x, 0) = g(e^x) & \text{in } G \end{array} \right.$$

Die partiellen Ableitungen bezüglich x werden nun durch zentrale Differenzenquotienten ersetzt. Die erste Ableitung einer beliebigen Funktion $f(x)$ nimmt somit als zentraler Differenzenquotient folgende Form an (Hilber, 2016b, S. 96-97):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Die zweite Ableitung ebendieser Funktion nimmt die Form

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

an (Hilber, 2016b, S. 100). Die Notation h steht dabei für die Maschenweite im Intervall G .

Zusammengesetzt bedeutet das für einen beliebigen Wert x_i [$i = 1, \dots, N$] unter Einbezug der vereinfachten Schreibweise für die partielle Ableitung nach der Zeit t $\omega_i'(t) = \frac{\partial V}{\partial \tau} \omega(x, t)$ (Hilber, 2016b, S. 119):

$$\omega_i'(t) + a \frac{\omega_{i-1}(t) - 2\omega_i(t) + \omega_{i+1}(t)}{h^2} + b \frac{-\omega_{i-1}(t) + \omega_{i+1}(t)}{2h} + c\omega_i(t) = 0$$

Dabei wurde folgende Funktion eingeführt, um dieser Approximation wieder Gleichheit zu verschaffen (Hilber, 2016b, S. 119):

$$\omega_i(t) \approx \omega(x_i, t)$$

Zur Vereinfachung der obigen Gleichung ergibt deren Auflösung drei Koeffizienten. Diese sind wie folgt definiert (Hilber, 2016b, S. 120):

$$\alpha = \frac{a}{h^2} - \frac{b}{2h}$$

$$\beta = -\frac{2a}{h^2} + c$$

$$\gamma = \frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}$$

Obige Gleichung lautet nun wie folgt:

$$\omega_i'(t) + \alpha\omega_{i-1}(t) + \beta\omega_i(t) + \gamma\omega_{i+1}(t) = 0$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\omega_i'(t) + \beta\omega_i(t) + \gamma\omega_{i+1}(t) = 0$$

und

$$\omega_N'(t) + \alpha\omega_{N-1}(t) + \beta\omega_N(t) = 0$$

Daraus lässt sich für sämtliche $i = [1, \dots, N]$ das Gleichungssystem als Matrizenschreibweise darstellen. Die beiden Vektoren $w(t)$ und $w'(t)$ definieren sich wie folgt (Hilber, 2016b, S. 120):

$$w(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \vdots \\ \omega_N(t) \end{pmatrix}, w'(t) = \begin{pmatrix} \omega_1'(t) \\ \omega_2'(t) \\ \vdots \\ \omega_N'(t) \end{pmatrix}$$

Zusammen mit der tridiagonalen $N \times N$ Matrix A (Hilber, 2016b, S. 109)

$$A = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & \\ & \alpha & \beta & \gamma & \\ & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

und dem Vektor der Auszahlungsfunktionen g (Hilber, 2016b, S. 120)

$$g = \begin{pmatrix} g(e^{x_1}) \\ g(e^{x_2}) \\ \vdots \\ g(e^{x_N}) \end{pmatrix}$$

ergibt dies (Hilber, 2016b, S. 120)

$$\begin{cases} w'(t) + Aw(t) = 0 \\ w(0) = g \end{cases}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$w(t) = e^{-At} g$$

welche allerdings nur von theoretischer Natur ist, da ihre Berechnung enorme Rechenleistung benötigt.

3.1.3 Approximation der Ableitung nach der Zeit

Im obigen Abschnitt wurden die Techniken der Finiten-Differenzen-Methode auf die Ableitungen nach dem logarithmierten Basiswertpreis x angewendet. Allerdings wurde die Ableitung nach der Zeit t bislang bewusst weggelassen. Diese wird nun in einem volldiskreten Verfahren wieder hinzugezogen. Es wird dabei wieder beim Ursprungsproblem begonnen:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} \omega(x, t) + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \omega(x, t) + b \frac{\partial V}{\partial x} \omega(x, t) + c \omega(x, t) = 0 & \text{in } G \times]0, T] \\ \omega(x_l, t) = 0 & \text{in }]0, T] \\ \omega(x_r, t) = 0 & \text{in }]0, T] \\ \omega(x, 0) = g(e^x) & \text{in } G \end{cases}$$

Prinzipiell wird das äquidistante Gitter G , welches bis anhin aus einer Achse bestand zu einem Produktgitter G erweitert. Dafür wird die Zeitspanne zwischen dem Zeitpunkt jetzt

$t_0 = 0$ und $t_M = T$ in M verschiedene Zeitschritte aufgeteilt. $k = \frac{T}{M}$ definiert dabei die Maschenweite im Zeitintervall (Hilber, 2016b, S. 132). Ein solches Produktgitter G wird in der nachfolgenden Abbildung 1 illustriert:

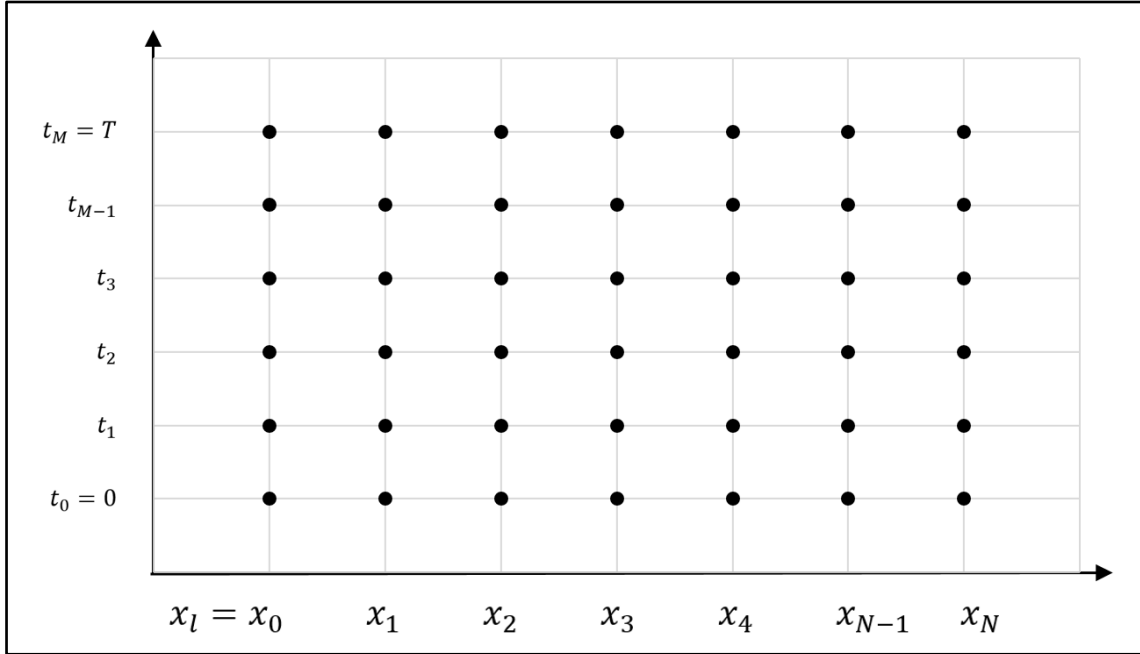


Abbildung 1: Illustrative Darstellung des Produktgitters

Nun wird das Crank-Nicolson Verfahren auf den Theta Term in der originalen PDE im BSM verwendet. Das Crank-Nicolson Verfahren definiert innerhalb des allgemeineren Theta-Verfahrens $\theta_{FD} = 0.5$. Dieser Fall gilt gemeinhin als optimalste Lösung, da der Konvergenzfaktor des Verfahrens so quadratisch ist, was bei einer anderen Wahl von θ_{FD} nicht der Fall wäre (vgl. Kapitel 3.2.3 sowie 3.3.5). An einem beliebigen Zeitpunkt t_j wird die Ableitung nach der Zeit mit folgenden Finiten-Differenzen approximiert:

$$\omega_i'(t_j) \approx \frac{\omega_i(t_j + k) - \omega_i(t_j)}{k}$$

Durch die Approximation verliert der obige Term seine Gleichheit, weswegen $\omega_i(t_j)$ durch $\omega_{i,j}$ approximiert wird, was wiederum Gleichheit erzwingt (Hilber, 2016b, S. 133).

Dieser Term kann nun mit dem Ergebnis der Ableitungen nach dem logarithmierten Basiswert x kombiniert werden. Unter der Verwendung der Matrix A ergibt dies folgendes Resultat (Hilber, 2016b, S. 134):

$$\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{k} + (1 - \theta_{FD})A\omega_{i,j} + \theta_{FD}A\omega_{i,j+1} = 0$$

Die Derivatpreise V zum Zeitpunkt $t = 0$ sind dabei bekannt. Gefragt sind die Derivatpreise V in Zukunft, respektive zum Zeitpunkt T . Daher können mit der Finite-Differenzen-Methode nun sukzessive Werte für die Zukunft berechnet werden. Dafür wird die obige Gleichung mit k multipliziert sowie die bekannten Terme auf die rechte Seite und die unbekannten Terme auf die linke Seite der Gleichung gelegt. Dies kann so interpretiert werden, als dass $\omega_{i,j}$ im ersten Berechnungsschritt $\omega_{i,0}$ entspricht, was bekannt ist (Hilber, 2016b, S. 134).

Daraus folgt:

$$\omega_{i,j+1} + k\theta_{FD}(\alpha\omega_{i-1,j+1} + \beta\omega_{i,j+1} + \gamma\omega_{i+1,j+1}) = \omega_{i,j} - k(1 - \theta_{FD})(\alpha\omega_{i-1,j} + \beta\omega_{i,j} + \gamma\omega_{i+1,j})$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nachfolgend ein neuer Vektor eingeführt (Hilber, 2016b, S. 135):

$$w_j = \begin{Bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \omega_{3,j} \\ \vdots \\ \omega_{N-1,j} \\ \omega_{N,j} \end{Bmatrix}, j = 0, 1, \dots, M$$

Daraus folgt unter Verwendung der bereits bekannten tridiagonalen Matrix A folgende Gleichung (Hilber, 2016b, S. 135):

$$w_{j+1} + k\theta_{FD}Aw_{j+1} = w_j - k(1 - \theta_{FD})Aw_j$$

wobei

$$w_0 = g \quad \text{und} \quad \theta_{FD} > 0$$

sind.

Zur Vereinfachung wird die Einheitsmatrix I dazu gezogen:

$$(I + k\theta_{FD}A)w_{j+1} = (I - k(1 - \theta_{FD})A)w_j, j = 0, \dots, M - 1$$

3.2 Anwendung der Finite-Differenzen-Methode im BSM

3.2.1 Nicht-Konstante Koeffizienten

Im Kapitel 3.1 wurde der Basiswert S im BSM logarithmiert, um konstante Koeffizienten a, b, c , respektive α, β, γ zu erwirken. Dies funktioniert im BSM einwandfrei, stellt aber

in sich eine Ausnahme dar, was bedeutet, dass dies beispielsweise in der Anwendung des Heston Modells nicht möglich ist. Daher wird bereits zu diesem Zeitpunkt die theoretische Vereinfachung wieder aufgegeben. Der Basiswertpreis wird nun wieder mit der Notation S geführt und das Intervall G wird somit in Bezug zu dem Basiswertpreis auf $G = [S_l, S_r]$ festgesetzt (Hilber, 2016b, S. 156). Wie auch im Modell mit konstanten Koeffizienten bedarf es zur Lösung der PDE Randbedingungen. So ist wiederum die Fixierung eines minimalen Basiswertpreises S_l sowie eines maximalen Basiswertpreises S_r notwendig. Wie im Kapitell 3.1.2 werden auch hier wieder Nullrandbedingungen gesetzt. Korrekterweise müsste die Randbedingung allerdings nur am rechten Rand S_r spezifiziert werden, da sich der Funktionswert am linken Rand $S_l = 0$ durch die Differenzialgleichung indirekt ergibt (Hilber, 2016b, S. 156).

Daraus ergibt sich das folgende Problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial V}{\partial t} \omega + a(S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \omega + b(S) \frac{\partial V}{\partial S} \omega + c(S) \omega = 0 & \text{in } G \times]0, T] \\ \omega(0, t) = 0 & \text{in }]0, T] \\ \omega(S_r, t) = 0 & \text{in }]0, T] \\ \omega(S, 0) = g(S) & \text{in } G \end{array} \right.$$

Dieses Problem beinhaltet folgende Koeffizienten:

$$a(S) = -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2, \quad b(S) = -(r - q)S, \quad c(S) = r$$

worin die Funktionen nach S als beliebig angenommen werden (Hilber, 2016b, S. 156).

Dieses Problem wird analog der Vorgehensweise im Kapitel 3.1 angegangen mit der Ausnahme, dass sich in der tridiagonalen Matrix A nun inkonstante Koeffizienten befinden.

Die tridiagonale Matrix A lässt sich, zur Veranschaulichung und als Hilfe für die Codierung sei dies hier kurz erwähnt, auch als Summe von Matrizen schreiben:

$$A = \text{Matrix}_a^{(2)} + \text{Matrix}_b^{(1)} + \text{Matrix}_c^{(0)}$$

Dies führt zu:

$$A = -\frac{1}{2} \sigma^2 \text{Matrix}_{S^2}^{(2)} - (r - q) \text{Matrix}_S^{(1)} + r \text{Matrix}_1^{(0)}$$

Darin lässt sich wiederum die Form der Struktur der zugrundeliegenden PDE erkennen (Hilber, 2016b, S. 157-158).

Final stellt sich das Problem wieder wie folgt dar:

$$(I + k\theta_{FD}A)w_{j+1} = (I - k(1 - \theta_{FD})A)w_j, j = 0, \dots, M - 1$$

Es handelt sich um Gleichungssysteme, die wiederum sukzessiv zu lösen sind. Dabei ist der Vektor $w_0 = g$ gegeben. Schlussendlich enthält der Vektor

$$w_M = \begin{pmatrix} \omega_{1,M} \\ \omega_{2,M} \\ \omega_{3,M} \\ \vdots \\ \omega_{N-1,M} \\ \omega_{N,M} \end{pmatrix}$$

die approximierten Derivatpreise V (Hilber, 2016b, S. 158). In diesem Vektor kann im Anschluss mit Hilfe einer Interpolation der Derivatpreis V bei einem bestimmten Basiswertpreis S_0 eruiert werden.

3.2.2 Anwendungsbeispiel im BSM

Mit Hilfe der Routinen `eurocallBSMFD` und `europutBSMFD` werden nun die Preise für klassische europäische Optionen, welche per Definition nur per Verfall ausgeübt werden können, als Test der Routinen bewertet und mit den Preisen der closed form Lösung des BSM Modells verglichen. Dazu wurden die Routine `eurocallBSMCF` und `europutBSMCF` verwendet⁴.

In der Tabelle 2 befinden sich die Parameter einer fiktiven europäischen Option, welche die Basis für die nachfolgende Berechnung bildet.

Tabelle 2: Testparameter für die Finite-Differenzen-Methode im BSM

Parameter	Notation	Wert
Initialer Basiswertpreis	S_0	10
Ausübungspreis	K	10
Volatilität des Basiswertes	σ	30%

⁴ Die Routinen befinden sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

Risikoloser Zinssatz	r	1%
Dividendenzahlung	D	1
Laufzeit	T	1
Minimaler Basiswertpreis	S_l	0
Maximaler Basiswertpreis	S_r	40
Anzahl Gitterpunkte im Preisintervall des Basiswertes	N	1000
Anzahl Gitterpunkte im Zeitintervall	M	200
Theta	θ_{FD}	0.5

Die Resultate aus den Berechnungen aus den obigen Parametern befinden sich in der nachfolgenden Tabelle 3.

Tabelle 3: Testresultate der Finiten-Differenzen-Methode im BSM

Derivat	Finite-Differenzen-Methode	closed form Lösung
Europäische Call Option	0.7725	0.7725
Europäische Put Option	1.5821	1.5821

Die Resultate werden bereits mit einer verhältnismässig geringen Anzahl Zeitschritten M und Basiswertpreisschritten N sowie mit minimalem Zeitaufwand genau. Dies bevorteilt die Finite-Differenzen-Methode in dieser Hinsicht deutlich von ihren Alternativen, wie beispielsweise einer Monte-Carlo-Simulation.

In der nachfolgenden Abbildung 2 befindet sich illustrativ eine grafische Darstellung der Derivatpreise V ebendieser europäischen Put Option in Abhängigkeit des Basiswertpreises S . Neben der Preisfunktion der Put Option (blau) zum Zeitpunkt $t = 0$ ist in der selben Grafik die Auszahlungsfunktion g (schwarz) abgebildet:

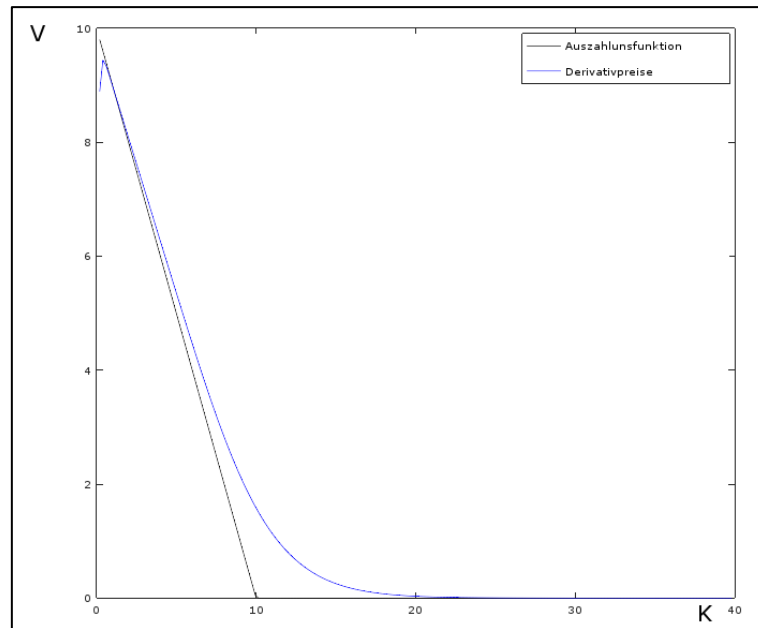


Abbildung 2: Preis- und Auszahlungsfunktion einer europäischen Put Option

Auf dieser Grafik ist der Effekt erkennbar, dass der Derivatpreis V bei einem Basiswertpreis von $S = 0$ als 0 definiert ist. Leider ist aufgrund grafischer Limitationen dieser Effekt nicht abschliessend ersichtlich und nur eine sofortige starke Abnahme der blauen Funktion nahe bei $S = 0$ zu erkennen. Dabei handelt es sich um eine der Nullrandbedingungen (vgl. Kapitel 3.1.2). Die zweite Nullrandbedingung ist nur insofern erkennbar, als dass der Preis einer Put Option V bei einem hohen Basiswertpreis S korrekterweise gegen 0 konvergiert.

In der Praxis ist allerdings selten die Bewertung einer simplen europäischen Option gefragt. Meistens sind die Derivate, die bewertet werden müssen deutlich komplexer und besitzen in aller Regel keine closed form Lösung mehr. So ist es bemerkenswert, dass mit der bisher erarbeiteten Methode zur Bewertung einer simplen europäischen Option bereits Probleme gelöst werden können, die deutlich komplizierter sind. So ist durch die korrekte Wahl der minimalen Werte S_l und maximalen Werte S_r für den Basiswertpreis die Bewertung von Barriere Optionen im BSM bereits möglich. Zudem kann die Finite-Differenzen-Methode in dieser Form Doppel-Barriere Optionen, das heisst Optionen mit Barrieren nach oben sowie nach unten, bewerten. Für dieses Problem beispielsweise existiert bereits keine closed form Lösung mehr.

3.2.3 Konvergenzanalyse im BSM

Eine Approximation mit der Finiten-Differenzen-Methode konvergiert quadratisch gegen den effektiven Wert. Dies ist allerdings nur gegeben, wenn $\theta_{FD} = 0.5$ gesetzt wird, also das Crank-Nicolson Verfahren angewandt wird. Um dies im Ansatz zu beweisen, wurde obiges Beispiel erneut herangezogen und die Preise der Put Option V mit steigendem N beginnend bei 10 berechnet. Die Anzahl Basiswertpreisschritte N wurde dabei bei jeder Berechnung verdoppelt. Die Anzahl Zeitschritte M wurde in dieser Analyse konstant bei 200 angesetzt.

Bei der nachfolgenden Analyse handelt es sich zu Illustrationszwecken um einen vereinfachten Test, welcher die Konvergenz nur an der Stelle des effektiven Optionspreises V testet. In der nachfolgenden Tabelle 4 befinden sich die Resultate dieser Analyse:

Tabelle 4: Konvergenzanalyse der Finiten-Differenzen-Methode im BSM

Preis der Put Option	N	Differenz
1.676663664	10	0.09454685510181
1.600632813	20	0.01851600348502
1.587857116	40	0.00574030703896
1.583656905	80	0.00154009543668
1.582515798	160	0.00039898918317
1.582218966	320	0.00010215700653

Die Illustration der quadratischen Konvergenz der Finite-Differenzen-Methode wird in der nachfolgenden Abbildung 3 zusätzlich grafisch dargestellt. Es wurden dafür sowohl die Skalierung der Anzahl Basiswertpreisschritte N als auch die Skalierung der Differenzen logarithmiert. In diesem Fall ergibt ein Problem mit quadratischer Konvergenz ein exakt lineares Bild. Der leichte Knick zu Beginn des Verlaufs ist auf die Ungenauigkeit einer solchen Analyse bei tiefen Werten für N zurückzuführen.

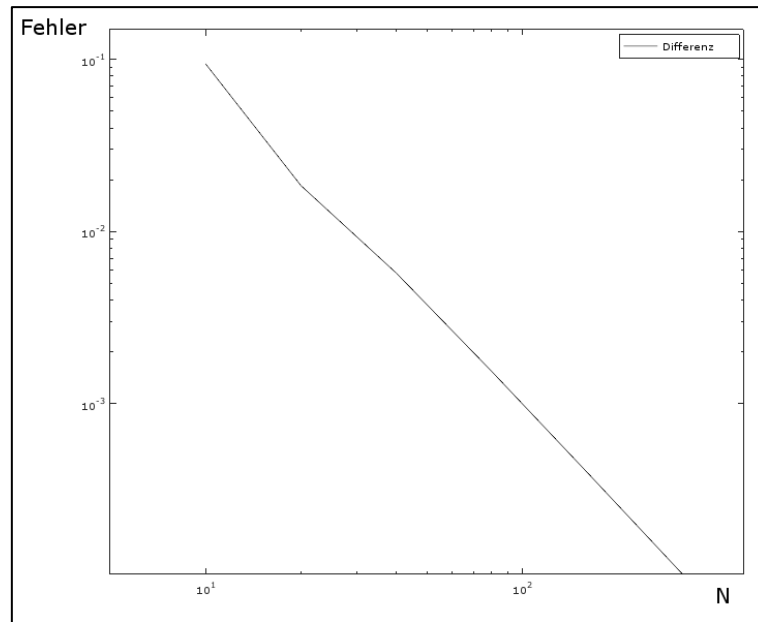


Abbildung 3: Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im BSM

Wie bereits erwähnt, beweist die obige Methode die quadratische Konvergenz nur am Punkt des effektiven Derivativpreises V und nicht über das ganze Feld der Approximationen hinweg. Eine detailliertere Studie der Konvergenz der Finite-Differenzen-Methode erfolgt im Kapitel 3.3.5 anhand des Heston Modells, welches den Kern dieser Arbeit darstellt.

3.3 Die Finite-Differenzen-Methode im Heston Modell

Wie auch beim BSM ist die Basis für die Anwendung der Finiten-Differenzen-Methode eine PDE. Für das Heston Modell lautet diese (vgl. Kapitel 2.3.2):

$$\frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_{HM}vS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma_{HM}^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + (\kappa(\theta - v)) \frac{\partial V}{\partial v} - rV - \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Dazu werden ebenfalls Randbedingungen gesetzt. Diese werden von Hirta (2013, S. 148) wie folgt definiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(S, v, 0) = g \\ \lim_{S \downarrow 0} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \omega(S, v, \tau) = 0 \\ \lim_{S \uparrow \infty} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \omega(S, v, \tau) = 0 \\ (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} \omega(S, 0, \tau) + \kappa \theta \frac{\partial V}{\partial v} \omega(S, 0, \tau) - r \omega(S, 0, \tau) - \frac{\partial V}{\partial \tau} \omega(S, 0, \tau) = 0 \\ \lim_{v \uparrow \infty} \omega(S, v, \tau) = S \end{array} \right.$$

In Worten gefasst bedeuten die obigen Randbedingungen, dass der Derivatpreis V erstens per Verfall den Konditionen der Auszahlungsfunktion g entsprechen muss. Die beiden weiteren Randbedingungen definieren den Derivatpreis V als 0 bei sehr hohen und gegen 0 konvergierenden Basiswertpreisen S . Diese Bedingungen entsprechen den Nullrandbedingungen analog zum BSM. Der vierte Term sorgt dafür, dass die jeweiligen Ableitungen bei einer Varianz $v = 0$ ebenfalls gleich 0 sind. Schlussendlich sorgt die letzte Randbedingung dafür, dass der Derivatpreis V bei gegen unendlich steigender Varianz v zum Basiswertpreis S konvergiert. Diese Randbedingungen werden allerdings durch die Finite-Differenzen-Methoden automatisch berücksichtigt, weswegen diesen keine weitere Aufmerksamkeit geschenkt wird und so als gegeben angesehen werden.

Analog zum BSM handelt es sich bei $\omega(S, v, \tau)$ um die Approximation der ursprünglichen Funktionen eines Derivates $V(S, v, \tau)$, respektive $u(S, v, \tau)$.

Das Gitternetz G muss der Tatsache zur Folge, dass es sich beim Heston Modell um eine zweistufige PDE handelt, um eine Achse erweitert werden. Diese Achse definiert das Intervall der Volatilität $\sqrt{v_t}$, welche im Heston Modell stochastisch modelliert wird. Die Maschenweite in diesem Intervall wird mit der Notation L angegeben. Demzufolge ist die Maschenweite des Volatilitätsintervalls gegeben durch $j = \frac{v_{max} - v_{min}}{L+1}$. Es handelt sich dabei ebenfalls um ein äquidistantes Gitter G analog der Gitter G in Bezug auf S und t . Zu diesem Zeitpunkt muss spezifiziert werden, dass zwar die Volatilität $\sqrt{v_t}$ stochastisch modelliert wird, allerdings wird ebendiese Volatilität $\sqrt{v_t}$ im Heston Modell quadriert, weswegen nachfolgend von der Varianz v gesprochen wird.

3.3.1 Approximation der Ableitungen nach dem Preis und der Varianz

Für die Approximation der Ableitungen nach S und v im Heston Modell werden vorerst wiederum die Finite-Differenzen-Approximationen, i.e. zentrale Differenzenquotienten verwendet. Die Differenzenquotienten lauten im spezifischen Fall des Heston Modells wie folgt (vgl. Hirsa, 2013, S. 150):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\omega_{i-1,d}(t) - 2\omega_{i,d}(t) + \omega_{i+1,d}(t)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} &= \frac{\omega_{i-1,d-1}(t) - \omega_{i-1,d+1}(t) - \omega_{i+1,d-1}(t) + \omega_{i+1,d+1}(t)}{4hj} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} &= \frac{\omega_{i,d-1}(t) - 2\omega_{i,d}(t) + \omega_{i,d+1}(t)}{j^2} \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\omega_{i+1,d}(t) - \omega_{i-1,d}(t)}{2h} \\ \frac{\partial V}{\partial v} &= \frac{\omega_{i,d+1}(t) - \omega_{i,d-1}(t)}{2j}\end{aligned}$$

Dabei wurde wie bereits im BSM die Funktion

$$\omega_{i,d}(t) \approx \omega(S, v, t)$$

verwendet, um in den Approximationen Gleichheit zu erzwingen.

Aus der obigen PDE, respektive aus den Koeffizienten ebendieser, ergeben sich zusätzlich sechs Funktionen, von welchen nachfolgend die Negative angegeben werden. Dies ist auf die Tatsache zurück zu führen, dass die PDE rückwärts in der Zeit gelöst werden muss (vgl. Kapitel 3.1.1):

$$\begin{aligned}a(S, v) &= -\frac{1}{2}vS^2 \\ b(S, v) &= -\rho\sigma_{HM}vS \\ c(S, v) &= -\frac{1}{2}\sigma_{HM}^2v \\ d(S, v) &= -(r - q)S \\ e(S, v) &= -(\kappa(\theta - v)) \\ f(S, v) &= r\end{aligned}$$

Kombiniert mit den Differenzenquotienten lautet die PDE nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
& a(S, v) \frac{\omega_{i-1,d}(t) - 2\omega_{i,d}(t) + \omega_{i+1,d}(t)}{h^2} \\
& + b(S, v) \frac{\omega_{i-1,d-1}(t) - \omega_{i-1,d+1}(t) - \omega_{i+1,d-1}(t) + \omega_{i+1,d+1}(t)}{4hj} \\
& + c(S, v) \frac{\omega_{i,d-1}(t) - 2\omega_{i,d}(t) + \omega_{i,d+1}(t)}{j^2} \\
& + d(S, v) \frac{\omega_{i+1,d}(t) - \omega_{i-1,d}(t)}{2h} + \\
& e(S, v) \frac{\omega_{i,d+1}(t) - \omega_{i,d-1}(t)}{2j} - f\omega(S, v) - \frac{\partial V}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

Nun können die einzelnen Terme separat als Matrizen geschrieben werden. Illustrativ wird dies hier mit dem Term $a(S, v) \frac{\omega_{i-1,d}(t) - 2\omega_{i,d}(t) + \omega_{i+1,d}(t)}{h^2}$ gemacht.

Für sämtliche verschiedenen Basiswertpreise S_i [$i = 1, \dots, i$] und gegebener Varianz v_d lauten die Terme:

$$\begin{aligned}
& a(S_1, v_d) \frac{\omega_{0,d}(t) - 2\omega_{1,d}(t) + \omega_{2,d}(t)}{h^2} \\
& a(S_2, v_d) \frac{\omega_{1,d}(t) - 2\omega_{2,d}(t) + \omega_{3,d}(t)}{h^2} \\
& \vdots \\
& a(S_i, v_d) \frac{\omega_{i-1,d}(t) - 2\omega_{i,d}(t) + \omega_{i+1,d}(t)}{h^2}
\end{aligned}$$

Als Matrix geschrieben lautet die Funktion nach S nun:

$$M_{a^S}^{(2)} = \frac{1}{h^2} \times \begin{pmatrix} -2a^S(S_1) & a^S(S_1) & 0 & 0 \\ a^S(S_2) & -2a^S(S_2) & a^S(S_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^S(S_i) & -2a^S(S_i) \end{pmatrix}$$

Die Matrix $M_{a^S}^{(2)}$ entspricht den Werten der Funktion $a(s, v)$ aller verschiedenen Basiswertpreisen S bei einer gegebenen Varianz v .

Die Funktionen für die Werte der Varianz v können ebenfalls in eine Matrix geschrieben werden. Diese lautet wie folgt:

$$M_{a^v}^{(0)} = \begin{pmatrix} a^v(v_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^v(v_2) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a^v(v_d) \end{pmatrix}$$

Um das Gitter G der Basiswertpreise S um die verschiedenen Varianzen v zu erweitern, werden die beiden obigen Matrizen kombiniert in eine weitere Matrix geschrieben. Es handelt sich dabei um eine sogenannte Blockmatrix, innerhalb welcher der Term $a^v(v_d)$ Funktionen für die Werte der jeweiligen Varianzen v darstellt:

$$M_A = \begin{pmatrix} a^v(v_1)M_{a_S}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^v(v_2)M_{a_S}^{(2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a^v(v_d)M_{a_S}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Für das Problem der Funktion $a(S, v)$ wurden zwei verschiedene Typen von Matrizen verwendet. Um das Problem für sämtliche Funktionen $a - f$ zu lösen werden insgesamt drei verschiedene Typen von Matrizen verwendet. Es handelt sich dabei um Matrizen für nicht abgeleitete Funktionen sowie für die erste und die zweite Ableitung ebendieser Funktion. Diese drei Matrizen werden mit Bezug auf eine beliebige Funktion $f(x)$ nachfolgend angegeben (Hilber, 2016b, S. 111).

Die Matrix für nicht abgeleitete Funktionen:

$$M_f^{(0)} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & & & \\ 0 & f_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & f_{N-1} & 0 \\ & & & 0 & f_N \end{pmatrix}$$

Die Matrix für die erste Ableitung einer Funktion lautet:

$$M_f^{(1)} = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & f_1 & & & \\ -f_2 & 0 & f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -f_{N-1} & 0 & f_{N-1} \\ & & & -f_N & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix für die zweite Ableitung einer Funktion lautet:

$$M_f^{(2)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2f_1 & f_1 & & & & \\ f_2 & -2f_2 & f_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & f_{N-1} & -2f_{N-1} & f_{N-1} & \\ & & & f_N & -2f_N & \end{pmatrix}$$

Um wieder zurück zum ursprünglichen Problem, i.e. der Darstellung der Funktion $a(S, v)$ als Matrix zu gelangen, folgt, dass es sich bei der Kombination der beiden Matrizen nach S und v um ein Kronecker-Produkt handelt. Ein Kronecker-Produkt ist definiert als Produkt zweier beliebig grossen Matrizen, welche zu Illustrationszwecken X und Y getauft werden. Dabei wird jeder einzelne Punkt innerhalb der X Matrix mit der Grösse $m \times p$ mit der ganzen Y Matrix mit der Grösse $n \times q$ multipliziert. Schematisch dargestellt sieht ein Kronecker-Produkt wie folgt aus (Hilber, 2016b, S. 244):

$$Z = X \otimes Y = \begin{pmatrix} X_{11}Y & X_{12}Y & \cdots & X_{1p}Y \\ X_{21}Y & X_{22}Y & \cdots & X_{2p}Y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1}Y & X_{m2}Y & \cdots & X_{mp}Y \end{pmatrix}$$

Das Kronecker-Produkt resultierend aus den Überlegungen für den Term der Funktion $a(S, v)$ wird im nachfolgenden als M_A bezeichnet. Die Notation A gibt einen Hinweis darauf, dass es sich um die Matrix handelt, die aus der Umschreibung der Funktion $a(S, v)$ entstanden ist:

$$M_A = M_{a^v}^{(0)} \otimes M_{a^S}^{(2)}$$

Ergänzt um die entsprechenden Funktionen lautet das Kronecker-Produkt:

$$M_A = M_1^0 \otimes M_{-\frac{1}{2}vS^2}^{(2)}$$

Diese Technik muss nun schematisch für die anderen Terme $b - f$ wiederholt werden.

Die benötigte Matrix A für die spätere Lösung des Gleichungssystems resultiert danach aus der Addition der sechs Kronecker-Produkte:

$$A = M_A + M_B + M_C + M_D + M_E + M_F$$

3.3.2 Approximation der Ableitung nach der Zeit

Um die Ableitung nach der Zeit t im Heston Modell zu approximieren wird wiederum das Theta-Verfahren verwendet. Wie bereits im Kapitel 3.1.3 erläutert, wird innerhalb des Theta-Verfahrens konkret $\theta_{FD} = 0.5$ gesetzt, womit die Voraussetzung des Crank-Nicolson Verfahrens erfüllt sind. Ebendieses wird auch im Heston Modell angewandt.

Das Gitter G wird auch im Heston Fall um eine Dimension erweitert. Dafür wird die Entwicklung der Zeit t ebenfalls in ein äquidistantes Gitter G mit $k = \frac{T}{M}$ Zeitschritten aufgeteilt. Dabei stellen $t_0 = 0$ und $t_M = T$ die Start-, beziehungsweise Endpunkte dar. Nun muss der Theta-Term, respektive die Ableitung nach der Zeit t in der PDE ebenfalls approximiert werden:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{\omega_{i,d}(t) - \omega_{i,d}(t-1)}{k}$$

Auch hier muss die Funktion $\omega_{i,d}^j \approx \omega_{i,d}(t)$ eingeführt werden, um für die Approximationen wieder Gleichheit zu erreichen.

Die bisherigen Approximationen, inklusive der Zusammenfassung der Koeffizienten in der Matrix A , lässt eine Zusammenfassung des Heston Modells wie folgt zu:

$$(1 - \theta_{FD})A\omega_{i,d}^j + \theta_{FD}A\omega_{i,d}^{j+1} + \frac{\omega_{i,d}^{j+1} - \omega_{i,d}^j}{k} = 0$$

Analog dem BSM wird aus den Werten $\omega_{i,d}^j$ folgender Blockvektor mit der Zusatzbedingung gebildet, dass die Werte sowohl vom Basiswertpreis S als auch von der Varianz v abhängen:

$$w_j = \begin{pmatrix} \omega_{1,1}^j \\ \omega_{2,1}^j \\ \vdots \\ \omega_{N,1}^j \\ \omega_{1,2}^j \\ \omega_{2,2}^j \\ \vdots \\ \omega_{N,2}^j \\ \vdots \\ \omega_{1,M}^j \\ \omega_{2,M}^j \\ \vdots \\ \omega_{N,M}^j \end{pmatrix}, j = 0, 1, \dots, M$$

Als Startvektor fungiert dabei der Vektor $w_0 = g$.

Eingefügt in obige Gleichung lautet das Modell nun:

$$(1 - \theta_{FD})Aw_j + \theta_{FD}Aw_{j+1} + \frac{w_{j+1} - w_j}{k} = 0$$

Umgeformt lautet das Modell:

$$w_{j+1} + k\theta_{FD}Aw_{j+1} = w_j - k(1 - \theta_{FD})Aw_j$$

Nach der Zugabe der Einheitsmatrix I resultiert die exakt selbe Schreibweise wie im BSM

$$(I + k\theta_{FD}A)w_{j+1} = (I - k(1 - \theta_{FD})A)w_j, j = 0, \dots, M - 1$$

3.3.3 Erweiterung der Randbedingungen

Das obige Modell löst die PDE im Heston Modell an allen Gitterpunkten N und M innerhalb des Gitters G einwandfrei. Einzig an den Rändern wurden bisher sogenannte Nullrandbedingungen (vgl. Kapitel 3.3.1) gesetzt. Diese sollen im Heston Modell an den kritischen Stellen, durch Approximationen der PDE ersetzt werden.

3.3.3.1 Intrinsische Randbedingungen

Die Nullrandbedingungen an den unteren Enden des Gitters G , i.e. bei $S_l = 0$ und $v_{min} = 0$, werden durch intrinsische Randbedingungen ersetzt. Die Approximationen an diesen Rändern würden mit normalen Differenzenquotienten Gitterpunkte N und L verwenden,

welche ausserhalb des gewählten Gitters G liegen, was nicht funktionieren kann. Daher müssen die Approximationen am linken Rand anhand folgender Differenzenquotienten, welche beispielhaft für die beliebige Funktion $f(x)$ dargestellt werden, approximiert werden (Hilber, 2016b, S. 164-165):

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

$$f''(x) \approx \frac{2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2}$$

Es werden dabei nur die Differenzenquotienten in eine Richtung verwendet, da nur die Randpunkte an den Rändern mit tiefer Varianz v und tiefem Basiswertpreis S mit intrinsischen Randbedingungen approximiert werden.

Diese Approximationen können nun direkt in die Matrizen aus dem Kapitel 3.3.1 eingebaut werden. Daraus resultieren wiederum drei verschiedene Typen von Matrizen (Hilber, 2016b, S. 176).

Die Matrix für nicht abgeleitete Funktionen lautet:

$${}^iM_f^{(0)} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & & & \\ 0 & f_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & f_{N-1} & 0 \\ & & & 0 & f_N \end{pmatrix}$$

Die Matrix für die erste Ableitung einer Funktion lautet:

$${}^iM_f^{(1)} = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} -3f_0 & 4f_0 & -f_0 & & & \\ -f_1 & 0 & f_1 & & & \\ & -f_2 & 0 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -f_{N-1} & 0 & f_{N-1} \\ & & & & -f_N & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix für die zweite Ableitung einer Funktion lautet:

$${}^iM_f^{(2)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2f_0 & -5f_0 & 4f_0 & -f_0 & & \\ f_1 & -2f_1 & f_1 & & & \\ & f_2 & -2f_2 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & f_{N-1} & -2f_{N-1} & f_{N-1} \\ & & & & f_N & -2f_N \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen ersetzen die Bestandteile der Koeffizientenmatrizen $M_A - M_F$ zur Bildung der Matrix A .

3.3.3.2 Randbedingung zweiter Ordnung

Um die Nullrandbedingung bei $v = v_{max}$ zu eliminieren wird eine Randbedingung zweiter Ordnung verwendet. Die Finite-Differenzen-Methode hat den grossen Vorteil, dass die erwähnten Randbedingungen sowie auch weitere Randbedingungen wie beispielsweise Dirichlet Randbedingungen oder Neumann Randbedingungen beliebig kombiniert werden können (Hilber, 2016b, S. 167). Um die Randbedingung zweiter Ordnung in die bestehenden Matrizen einzubauen, werden die obigen Matrizen noch einmal erweitert, allerdings betrifft dies nur diejenigen Matrizen nach v , da lediglich die Nullrandbedingung bei der maximalen Varianz v_{max} eliminiert werden soll. Die Matrizen für die erste und die zweite Ableitung lauten anhand des Beispiels der beliebigen Funktion $f(x)$ wie folgt (Hilber, 2016b, S. 167):

$${}_s^i M_f^{(1)} = \frac{1}{2h} \left\{ \begin{array}{ccccccc} -3f_0 & 4f_0 & -f_0 & & & & \\ -f_1 & 0 & f_1 & & & & \\ & -f_2 & 0 & f_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -f_{N-1} & 0 & f_{N-1} & \\ & & & & -f_N & 0 & f_N \\ & & & & \frac{1}{2}f_{N+1} & -3f_{N+1} & \frac{5}{2}f_{N+1} \end{array} \right\}$$

und

$${}_s^i M_f^{(2)} = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2f_0 & -5f_0 & 4f_0 & -f_0 & & & \\ f_1 & -2f_1 & f_1 & & & & \\ & f_2 & -2f_2 & f_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & f_{N-1} & -2f_{N-1} & f_{N-1} & \\ & & & & f_N & -2f_N & f_N \\ & & & & \frac{1}{2}f_{N+1} & -f_{N+1} & \frac{1}{2}f_{N+1} \end{array} \right\}$$

3.3.4 Anwendungsbeispiel im Heston Modell

Die Lösung der Heston PDE anhand der Finiten-Differenzen-Methode wurde in Matlab programmiert. Mit Hilfe der Routinen `eurocallHMFD` und `europutHMFD`⁵ können herkömmliche europäische Optionen bewertet werden.

Zur Überprüfung der Routinen wird wiederum ein fiktives Beispiel verwendet. Die Parameter entsprechen denjenigen des Beispiels im BSM (vgl. Kapitel 3.2.2) unter Zuzug von weiteren Parametern, die für das Heston Modell notwendig sind. Sämtliche verwendeten Parameter werden in der nachfolgenden Tabelle 5 aufgelistet:

Tabelle 5: Testparameter für die Finite-Differenzen-Methode im Heston Modell

Parameter	Notation	Wert
Initialer Basiswertpreis	S_0	10
Ausübungspreis	K	10
Initiale Volatilität des Basiswertes	σ	30%
Risikoloser Zinssatz	r	1%
Dividendenzahlung	D	1
Laufzeit	T	1
Minimaler Basiswertpreis	S_l	0
Maximaler Basiswertpreis	S_r	40
Minimale stochastische Varianz	v_{min}	0
Maximale stochastische Varianz	v_{max}	1
Anzahl Gitterpunkte im Preisintervall des Basiswertes	N	200
Anzahl Gitterpunkte im Zeitintervall	M	100

⁵ Diese Routinen befinden sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

Anzahl Gitterpunkte im Varianzintervall	L	200
Rückkehrgeschwindigkeit der Varianz zum Mittelwert	κ	1
Langzeitvarianz	θ	0.15
Volatilität der Varianz	σ_{HM}	0.4
Korrelationskoeffizient	ρ	-0.8
Theta	θ_{FD}	0.5

Aus den obigen Parametern ergaben sich folgende Resultate:

Tabelle 6: Testresultate der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell

Derivat	Finite-Differenzen-Methode	closed form Lösung
Europäische Call Option	0.7776	0.7772
Europäische Put Option	1.5872	1.5867

Die Resultate, welche mit der Finiten-Differenzen-Methode berechnet wurden, kommen bereits mit verhältnismässig wenigen Gitterpunkten N, M, L nah an die closed form Lösung heran. Die closed form Lösung wurde dabei mit Hilfe der Routine `generellHMCF`⁶, welche durch den Referenten dieser Masterthesis (Dr. Norbert Hilber) zur Verfügung gestellt wurde, berechnet.

Im Vergleich zum BSM dauert die Berechnung im Heston Modell zwar deutlich länger, was allerdings immer noch in einem vernünftigen Rahmen liegt (vgl. Kapitel 5.3). Dass die benötigte Zeit für die Anwendung der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell höher sein würde als im BSM, konnte erwartet werden, da aufgrund der Erweiterung des Gitters G auf die Varianz v um einiges mehr Rechenschritte benötigt werden.

⁶ Diese Routine befindet sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

In der nachfolgenden Abbildung 4 wird illustrativ das grafische Resultat für die obige europäische Put Option V abgebildet. Es handelt sich dabei um die verschiedenen Derivatpreise V bei verschiedenen Basiswertpreisen S und Varianzen v zum Zeitpunkt $t = 0$.

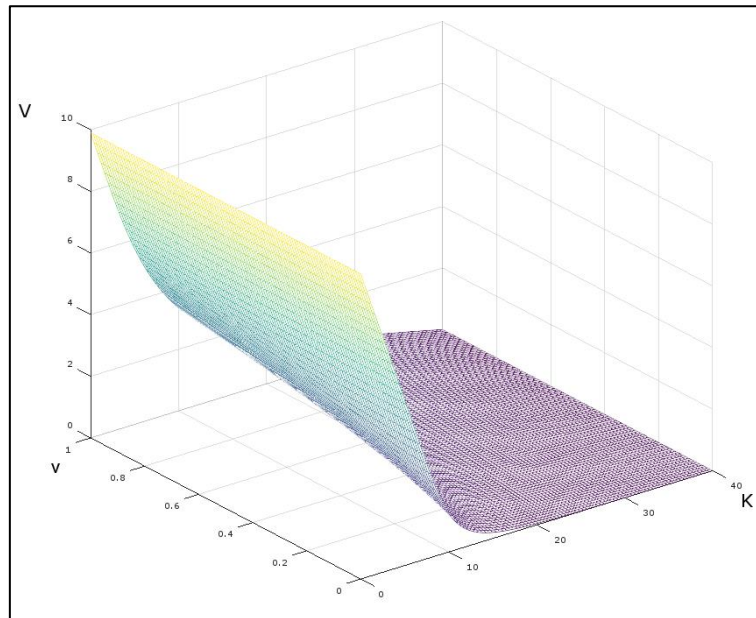


Abbildung 4: Derivatpreis einer europäischen Put Option im Heston Modell

Im Vergleich zum BSM ist hier beim Basiswertpreis $S = 0$ keine plötzliche Abnahme des Derivatpreises V zu erkennen. Dies liegt daran, dass die Nullrandbedingungen bei $S_l = 0$ eliminiert wurde. Dasselbe gilt für $v_{min} = 0$ und $v = v_{max}$.

3.3.5 Konvergenzanalyse im Heston Modell

Um die effektive Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode zu testen, wird am Beispiel des Heston Modells ein weitergreifender Test, als dies noch für das BSM gemacht wurde (vgl. Kapitel 3.2.3), durchgeführt. Dafür wird nicht nur die Konvergenz eines einzelnen Wertes getestet, sondern diejenige eines ganzen Feldes von Resultaten. Dabei ist jeweils derjenige Wert massgebend, der innerhalb dieses Feldes von Derivatpreisen V die grösste Differenz zu seinem exakten closed form Preis aufweist. Da die Finite-Differenzen-Methode zur Lösung der PDE im Heston Modell ein ganzes Netz an Derivatpreisen V bei verschiedenen Basiswertpreisen S und Varianzen v ausgibt, wird nachfolgend auch ein ganzes Netz auf ihre Konvergenz getestet. Die Resultatmatrix einer jeden

Approximation der Heston PDE mit der Finiten-Differenzen-Methode entspricht jeweils einer $(N + 2) \times (L + 2)$ Matrix G . Diese ist in diesem Kontext definiert als:

$$G = [S_l, S_r] \times [v_{min}, v_{max}]$$

Daraus wird zur Optimierung der Rechenleistung und aufgrund der Vermeidung von möglichen Fehlern bei den Randbedingungen das analysierte Gitter G verringert. Für die Konvergenzanalyse wird folgender Teil der Resultatmatrix analysiert:

$$\tilde{G} = \left[h, \frac{S_r}{2} \right] \times \left[j, \frac{v_{max}}{2} \right] \in G$$

Dabei ist aufgrund der Tatsache, dass es sich beim Heston Modell um eine zweistufige PDE handelt, nur noch eine lineare Konvergenz zu erwarten, da es zur Erreichung einer identischen Verbesserung des Fehlers wie im BSM einer Verdoppelung der Basiswertpreisschritte N sowie der Varianzschritte L bedarf. Die nachfolgenden Resultate in der Tabelle 7 und der Abbildung 5 wurden mit Hilfe der Matlab-Routine `europutHMFD-Konv`⁷ berechnet. Des Weiteren entsprechen die Resultate denjenigen einer klassischen europäischen Put Option, welche mit denselben Inputparametern berechnet wurde, wie bereits im Anwendungsbeispiel im Heston Modell (vgl. Kapitel 3.3.4).

Die Erhöhung der Anzahl Basiswertpreisschritte N sowie der Anzahl Varianzschritte L erfolgte jeweils nach einem bestimmten Schema:

$$N_i = L_i = 2^{3+i} - 1$$

Mit dieser Wahl von N kann sichergestellt werden, dass der Ausübungspreis K jeweils ein Gitterpunkt darstellt, da der maximale Wert nach dem Basiswertpreis $S_r = 40$ ebenfalls eine Zweierpotenz repräsentiert. Die Werte für L wurden aus Gründen der Einfachheit mit den Werten für N gleichgesetzt. Die Werte für N und L werden so in jeden Schritt in etwa verdoppelt. Die Werte für M entsprechen in dieser Analyse der aufgerundeten Hälfte von N , respektive L . In der Tabelle 7 befindet sich eine Übersicht mit den erzielten Resultaten. Dabei ist vor allem die Differenz zwischen den Modellpreisen und der closed form Lösung, welche in diesem Fall mit dem Faktor 4 konvergieren sollte, relevant:

⁷ Diese Routine befindet sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

Tabelle 7: Konvergenzanalyse der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell

N	L	NxL	M	Differenz
15	15	225	8	0.106739749107
31	31	961	16	0.027745934793
63	63	3969	32	0.006996949006
127	127	16129	64	0.001782571263
255	255	65025	128	0.000523624938

In der Praxis konvergiert das Modell nicht ganz linear, i.e. der Abnahmefaktor der Differenz entspricht nicht durchgehend dem Faktor 4. Der Beweis für die nach wie vor gute Konvergenz der Finite-Differenzen-Methode wird in der nachfolgenden Abbildung 5 illustrativ dargestellt. Es wurden dafür sowohl die Skalierung der Anzahl N und L als auch die Skalierung der Differenzen logarithmiert. In diesem Fall ist ein exakt lineares Bild zu erwarten. Allerdings wäre diese grafische lineare Abnahme, wie oben erläutert, nicht mehr so stark wie im BSM-Fall. Effektiv erkennbar ist grafisch eine lineare Abnahme, was auf eine stetige Konvergenz deutet. Die Steigung der Gerade erreicht in der Abbildung 5 allerdings, wie oben bereits erwähnt, nicht ganz den Wert -1.

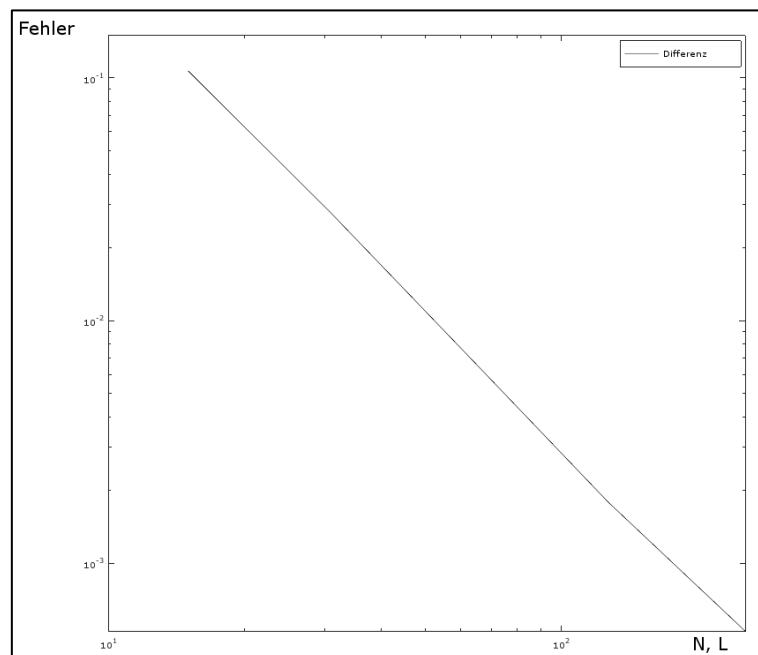


Abbildung 5: Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell

4 Pricing eines Barrier Reverse Convertibles

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 2 und 3 erarbeiteten Modelle und Methoden anhand eines realen Beispiels angewandt. Bei diesem realen Beispiel handelt es sich um einen BRC, welcher aktuell am Sekundärmarkt gehandelt werden kann und nachfolgend definiert wird. Daneben wird ebenfalls in diesem Kapitel die Kalibrierung der beiden Modelle an Marktdaten, die dem gewählten BRC entsprechend, durchgeführt.

4.1 Definition eines konkreten BRC

Um das Heston Modell einem realen Test zu unterziehen, wird es zur Bewertung eines konkreten strukturierten Produktes verwendet. Bei der Wahl dieses Produktes war es wichtig, dass es sich zwar um ein gängiges, allerdings auch nicht zu triviales Produkt handelt. So fiel die Wahl auf einen BRC (Kategorie Nr. 1230 des Schweizerischen Verbandes für strukturierte Produkte [SVSP]), da dieser einerseits eine Kombination aus verschiedenen Elementen darstellt und andererseits eine permanente Beobachtung einer Barriere B erfordert. Die Wahl für ein konkretes Produkt fiel auf einen bereits emittierten BRC der Vontobel Holding AG auf die ABB Aktie (Symbol: ABBN, Valor: 1'222'171, Handelsplatz: SIX Swiss Exchange). Der BRC ist bis zu seinem Verfall am 16. Februar 2018 ebenfalls an der SIX Swiss Exchange in Schweizer Franken [CHF] handelbar. Die Details zu diesem Produkt können der nachfolgenden Tabelle 8 entnommen werden, wobei sich alle Informationen auf Angaben der Vontobel Holding AG (2017) beziehen:

Tabelle 8: Produktspezifikationen des BRC auf ABBN

Produktspezifikationen	Notation	Wert
Initialer Basiswertpreis	S_0	22.83
Ausübungspreis	K	22.83
Barriere	B	17.12
Nominalwert	$Nominal$	1'000
Laufzeit	T	1.07397
Coupon	C	4.55%

Die Bewertung dieses BRC erfolgt per Emission des Produktes. Die weiteren relevanten Details zum Produkt können dem Factsheet entnommen werden, welches sich im Anhang unter «Factsheet des BRC» befindet.

4.2 Zerlegung des BRC in Einzelteile

Ein BRC kann, wie die meisten strukturierten Produkte, in Einzelteile zerlegt werden. Dieser Schritt ist insofern notwendig, als dass das Produkt im Anschluss in Einzelteilen bewertet wird. Als Startpunkt dieser Zerlegung dient die Auszahlungsfunktion eines BRC (Hilber, 2016a, S. 59):

$$g(S_T) = C^m + Nominal - nI^c \max(K - S_T, 0)$$

wobei gilt:

$$I^c = \begin{cases} 0 & \text{wenn die Barriere nicht berührt wurde} \\ 1 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Zu einem BRC gehört erstens eine festverzinsliche Komponente. Dabei handelt es sich einerseits um den Nominalwert und andererseits um den Coupon. Bei einem einmaligen Coupon-, respektive Rückzahlungsdatum entspricht dies einem einmaligen Zahlungsstrom per Verfall, welcher der Rückzahlung eines sogenannten Zerobonds mit Nominalwert $Nominal + Coupon$ gleichkommt. Mathematisch ausgedrückt hat die festverzinsliche Komponente einen Barwert von:

$$Nominal \times (1 + C) \times e^{-rT}$$

Dieser eben beschriebene Fall trifft auf den gewählten BRC auf ABBN zu. Es kann allerdings sein, dass der Coupon in mehreren Tranchen ausbezahlt wird, was entsprechende Anpassungen dieser Formel zu Folge hätte.

Des Weiteren besteht ein BRC aus einer Short Position in einer Down-and-In Put Option. Eine Down-and-In Put Option hat folgende Auszahlungsfunktion:

$$I^c \max(K - S_T, 0)$$

Für die spätere Bewertung des BRC muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass der Preis einer Down-and-In Put Option exakt der Differenz einer europäischen Put Option und einer Down-and-Out Put Option entspricht. Diese Information wird für die Bewertung des konkreten Produkts von grossem Nutzen sein.

Als letztes ist die Ratio n als Verhältnis zwischen dem Nominalbetrag und dem Ausübungspreis K zu bestimmen:

$$n = \frac{\text{Nominal}}{K}$$

Zusammengefasst sind die möglichen Auszahlungsszenarien eines BRC auf der Abbildung 6 dargestellt (SVSP, 2017):

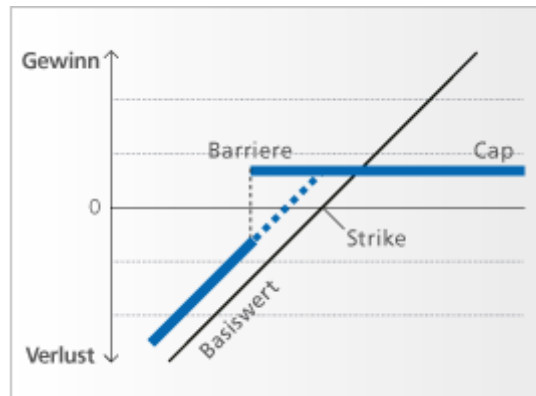


Abbildung 6: Auszahlungsfunktion eines BRC

4.3 Kalibrierung der Modelle

In diesem Abschnitt werden die benötigten Inputparameter für das Modell zur Lösung der PDE im BSM sowie im Heston Modell geschätzt und damit entsprechend das Modell kalibriert. Die Gesamtheit der Inputparameter wird pro Modell am Schluss der Kalibrierung in einer jeweiligen Tabelle zusammengefasst.

Die Kalibrierung der Modelle erfolgt beide Male durch effektive Marktoptionspreise, welche per 20. Januar 2017 an der EUREX fixiert wurden. Die zugrundeliegenden Daten stammen aus der Datenbank von Bloomberg (2017) und befinden sich im Anhang in der Tabelle 15. Es werden für die Kalibrierung nur Put Optionen verwendet, da diese Kalibrierung auch nur für die Bewertung von Put Optionen verwendet wird.

Da die Kalibrierung des Heston Modells durch eine bestehende Optimierungsroutine in Matlab erfolgt, welche nicht im Fokus dieser Arbeit steht, wird nur die Kalibrierung für das BSM eigenständig durchgeführt. Die Kalibrierung des Heston Modells wird daneben schematisch erläutert.

4.3.1 Kalibrierung des BSM

Zur Kalibrierung des BSM ist lediglich die Schätzung der initialen Volatilität σ notwendig. Obwohl ebendiese auch durch implizierte Volatilitäten σ aus wenigen gegebenen Marktoptionspreisen berechnet werden könnte, macht es aus Gründen der Vergleichbarkeit Sinn, diese analog der Kalibrierung des Heston Modells zu bestimmen. Dafür werden die quadrierten Residuen zwischen den Marktoptionspreisen aus der Tabelle 15 und den Modellwerten im BSM minimiert. Der einzige Inputfaktor in dieses Verfahren ist die Volatilität σ (Hilber, 2016b, S. 18).

Zu Beginn wird im BSM eine stellvertretende initiale Volatilität σ angenommen und damit sowie anhand der restlichen Optionsparameter der Modellwert der Put Optionen V mit der closed form Lösung berechnet. Die quadrierte Differenz aus dem Modellpreis einer Put Option V_j und ihrem Marktwert V_j^M ergibt das Residuum e_j :

$$e_j = (V_j(\sigma) - V_j^M)^2$$

Daraus folgt die Funktion $d(\sigma)$ für die Summe der Residuen über alle zugrundeliegenden Put Optionen V :

$$d(\sigma) = \sum_{j=1}^m (V_j(\sigma) - V_j^M)^2$$

Es handelt sich dabei um ein nichtlineares Ausgleichsproblem, da die Preise von Put Optionen V nicht linear von der Volatilität σ abhängen (Hilber, 2016b, S. 18).

Nun wird das Minimum dieser Funktion $d(\sigma)$ gesucht. Dies bedingt, dass $d'(\sigma) = 0$ ist. Um dieses Nullstellenproblem zu lösen wird das Newton-Verfahren angewendet. Dieses Verfahren setzt folgende Approximation für die Volatilität σ an einem beliebigen Iterationsschritt $k = 0, 1, 2, \dots$ (Hilber, 2016b, S. 14):

$$\sigma_{j,k+1} = \sigma_{j,k} - \frac{V_j(\sigma_{j,k}) - V_j^M}{V_j'(\sigma_{j,k})}$$

Die obige Gleichung beschreibt dabei das Iterationsverfahren für eine einzelne Put Option. Da in diesem Fall die Residuen einer ganzen Liste von Preisen von Put Optionen V minimiert werden müssen, stellt sich das zu lösende Problem wie folgt dar (Hilber, 2016b, S. 19):

$$\sigma_{k+1} = \sigma_{j,k} - \frac{d'(\sigma_k)}{d''(\sigma_k)}$$

Die ersten beiden Ableitungen der Funktion $d(\sigma)$ lauten (Hilber, 2016b, S. 19):

$$d'(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^m (V_j(\sigma) - V_j^M) V'_j(\sigma)$$

$$d''(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^m V_j'^2(\sigma) + (V_j(\sigma) - V_j^M) V''_j(\sigma)$$

Zur Vereinfachung wird die zweite Ableitung allerdings durch folgenden Term, welcher den zweiten Teil der Ableitung ignoriert, approximiert:

$$d''(\sigma) \approx 2 \sum_{j=1}^m V_j'^2(\sigma)$$

Daraus folgt eine vereinfachte Schreibweise unter der Verwendung von Matrizen, da das Problem wie erwähnt für eine ganze Liste von Preisen von Put Optionen V gelöst werden muss:

$$r(\sigma) = \begin{Bmatrix} V_1(\sigma) - V_1^M \\ V_2(\sigma) - V_2^M \\ \vdots \\ V_m(\sigma) - V_m^M \end{Bmatrix}, \quad J(\sigma) = \begin{Bmatrix} V'_1(\sigma) \\ V'_2(\sigma) \\ \vdots \\ V'_m(\sigma) \end{Bmatrix}$$

Das zu lösende Matrizenproblem lautet schlussendlich:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{J(\sigma_k)^T r(\sigma_k)}{J(\sigma_k)^T J(\sigma_k)}$$

Anhand der obigen Anleitung wird nun die gesuchte implizierte Volatilität σ durch ein Iterationsverfahren approximiert. Das bedeutet, dass in obiges Verfahren jeweils die neu erhaltene Volatilität σ_{k+1} wieder neu in das Iterationsverfahren eingesetzt wird, bis die Differenz zwischen der «neuen» und der «alten» Volatilität σ_k absolut kleiner ist, als eine Toleranzschwelle. Zur Lösung dieses Problems wurde die Routine `europutBSMKAL`⁸

⁸ Diese Routine befindet sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

geschrieben. Diese Routine ist an diejenige von Hilber (2016b, S. 21) angelehnt, wurde allerdings auf das konkret vorliegende Problem angepasst.

Zusätzlich zur implizierten Volatilität σ berechnet die Routine den Fehler der Approximation. Dieser Fehler berechnet sich wie folgt:

$$ARPE = \frac{\sum_{j=1}^m |V_j(\sigma) - V_j^M|}{V_j^M}$$

Obige Routine ergibt für die zu berechnende Down-and-In Put Option, die dem BRC zugrunde liegt, unter der Verwendung der Preise von Marktoptionen in Tabelle 15, die initiale Volatilität $\sigma = 22.238\%$.

Der Fehler der Approximation lautet: $ARPE = 24.978\%$.

Um die Bedeutung dieses Fehlers zu verdeutlichen sind in der nachfolgenden Abbildung 7 die Marktpreise der Put Optionen V_j^M (\circ) sowie die Modellpreise der Put Optionen bei der initialen Volatilität $V_j(\sigma)$ (\times) abgebildet. Es ist dabei zu erkennen, dass die Modellpreise der Put Optionen, welche aus dem Geld liegen, tendenziell unterschätzt werden et vice versa.

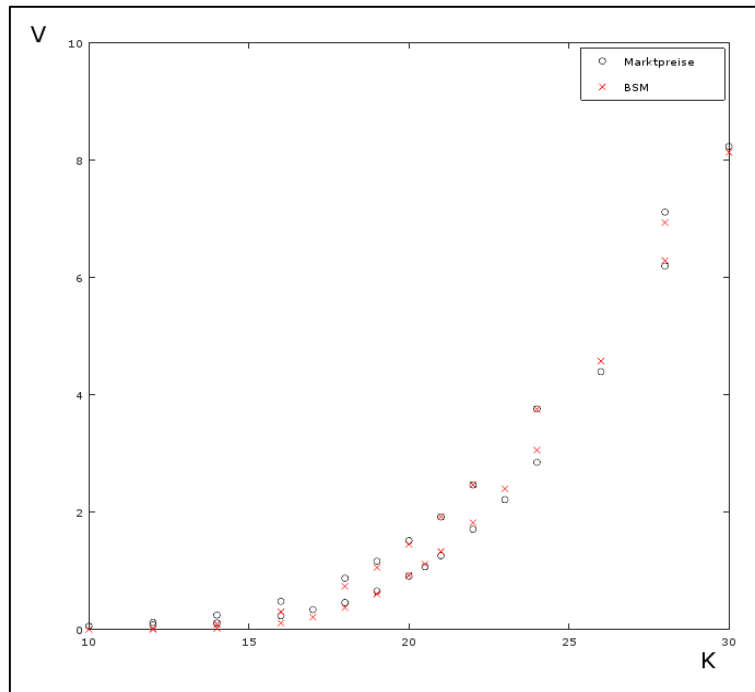


Abbildung 7: Vergleich Modell- und Marktpreise zur Kalibrierung im BSM

Die Modellparameter im BSM lauten zusammengefasst wie folgt:

Tabelle 9: Modellparameter zur Bewertung des BRC im BSM

Modellparameter	Notation	Wert
Initialer Basiswertpreis	S_0	22.83
Ausübungspreis	K	22.83
Volatilität des Basiswertes	σ	22.238%
Risikoloser Zinssatz ⁹	r	-0.509%
Dividendenzahlung ¹⁰	D	0.74
Stetige Dividendenrendite	q	3.1899%
Laufzeit	T	1.07397
Nominalwert	$Nominal$	1'000
Coupon	C	4.55%
Minimaler Aktienkurs	S_l	0
Barriere	B	17.12
Maximaler Aktienkurs	S_r	100
Anzahl Gitterpunkte im Preisintervall des Basiswertes	N	600
Anzahl Gitterpunkte im Zeitintervall	M	300
Theta	θ_{FD}	0.5

⁹ Es handelt sich um den CHF 12-Monats London Interbank Offered Rate [LIBOR] im Januar 2017 der Schweizerischen Nationalbank [SNB] (2017).

¹⁰ Angabe gemäss Informationen der Firmenwebseite (ABB, 2017).

4.3.2 Kalibrierung des Heston Modells

Die Kalibrierung im Heston Modell erfolgt von der Logik her identisch wie diejenige im BSM. Allerdings bedarf die Kalibrierung im Heston Modell die Schätzung von fünf Inputfaktoren. Es handelt sich dabei um die initiale Volatilität σ , die Geschwindigkeit der Rückkehr der Varianz zum Mittelwert κ , die Langzeitvarianz θ , die Volatilität der Varianz σ_{HM} sowie den Korrelationskoeffizienten ρ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Notation $\eta = (\sigma, \kappa, \theta, \sigma_{HM}, \rho)$ eingeführt. Sie dient dazu, dass theoretische Problem mit fünf unbekannten Variablen vereinfacht darzustellen.

Nachdem die Parameter durch initiale Stellvertreter ersetzt wurden, werden die Derivatpreise V mit der closed form des Heston Modells berechnet. Die quadrierten Abweichungen ergeben wiederum die Residuen:

$$e_j = (V_j(\eta) - V_j^M)^2$$

Daraus folgt die Funktion $d(\sigma)$ für die Summe der Residuen über alle zugrundeliegenden Put Optionen V :

$$d(\eta) = \sum_{j=1}^m (V_j(\eta) - V_j^M)^2$$

Als nächster Schritt wird wiederum das Minimum der Funktion $d(\eta)$ gesucht. Im BSM-Fall musste dafür die Funktion $d'(\sigma) = 0$ sein. Da es sich im Fall des Heston Modells um ein Problem mit mehr als einer Unbekannten handelt, muss folgende Bedingung erfüllt sein (Hilber, 2016b, S. 197):

$$d'(\hat{\eta}) = \begin{Bmatrix} \partial_{\eta_1} d(\hat{\eta}) \\ \partial_{\eta_2} d(\hat{\eta}) \\ \vdots \\ \partial_{\eta_n} d(\hat{\eta}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Es handelt sich dabei um ein nichtlineares Gleichungssystem, da jedes einzelne Problem mit einer Unbekannten in sich ein nichtlineares Ausgleichsproblem darstellt. Dieses Problem lässt sich ebenfalls mit Hilfe des Newton Verfahrens (vgl. Kapitel 4.3.1) lösen (Hilber, 2016b, S. 197). Dafür werden wiederum Ableitung von $d(\eta)$ benötigt. Unter

Verwendung der identischen Methodik wie im BSM resultieren der Vektor $r(\eta)$ und die Matrix $J(\eta)$:

$$r(\eta) = \begin{Bmatrix} V_1(\eta) - V_1^M \\ V_2(\eta) - V_2^M \\ \vdots \\ V_m(\eta) - V_m^M \end{Bmatrix}, \quad J(\eta) = \begin{Bmatrix} \partial_{\eta_1} V_1(\eta) & \partial_{\eta_2} V_1(\eta) & \cdots & \partial_{\eta_n} V_1(\eta) \\ \partial_{\eta_1} V_2(\eta) & \partial_{\eta_2} V_2(\eta) & \cdots & \partial_{\eta_n} V_2(\eta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{\eta_1} V_m(\eta) & \partial_{\eta_2} V_m(\eta) & \cdots & \partial_{\eta_n} V_m(\eta) \end{Bmatrix}$$

Da es sich bei η nicht mehr um eine Zahl, sondern um einen Vektor handelt ist eine Übernahme der Schreibweise des finalen Problems analog des BSM sinnlos, da die Division des Vektors $J(\eta_k)^T r(\eta_k)$ durch die $n \times n$ Matrix $J(\eta_k)^T J(\eta_k)$ keinen Sinn macht (Hilber, 2016b, S. 198). Anstelle dessen stellt sich das zu lösende Problem wie folgt dar:

$$\eta_{k+1} = \eta_k - (J(\eta_k)^T J(\eta_k) + \lambda_k I)^{-1} J(\eta_k)^T r(\eta_k)$$

Darin steht $\lambda_k I$ für:

$$\lambda_k I = \sum_{j=1}^m r_j(\eta_k) H_j(\eta_k)$$

Des Weiteren steht $H_j(\eta)$ für:

$$H_j(\eta) = \begin{Bmatrix} \partial_{\eta_1 \eta_1} V_j(\eta) & \partial_{\eta_1 \eta_2} V_j(\eta) & \cdots & \partial_{\eta_1 \eta_n} V_j(\eta) \\ \partial_{\eta_2 \eta_1} V_j(\eta) & \partial_{\eta_2 \eta_2} V_j(\eta) & \cdots & \partial_{\eta_2 \eta_n} V_j(\eta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{\eta_n \eta_1} V_j(\eta) & \partial_{\eta_n \eta_2} V_j(\eta) & \cdots & \partial_{\eta_n \eta_n} V_j(\eta) \end{Bmatrix}$$

Die Implementierung dieses Problems wurde vom Referenten dieser Masterthesis (Dr. Norbert Hilber) durchgeführt. Die Kalibrierung hat folgende Werte für die gesuchten Inputparameter ergeben:

$$\sigma = 0.14191, \kappa = 1.55806, \theta = 0.09521, \sigma_{HM} = 0.91194, \rho = -0.16940$$

Der Fehler dieser Schätzung liegt bei 4.9%.

Um die Bedeutung dieses Fehlers auch im Heston Modell zu verdeutlichen sind in nachfolgenden Abbildung 8 wiederum die Marktpreise der Put Optionen V_j^M (○) sowie die Modellpreise der Put Optionen bei den initialen Modellparametern $V_j(\sigma, \kappa, \theta, \sigma_{HM}, \rho)$ (×) analog dem BSM abgebildet. Es ist dabei erkennbar, dass der Schätzfehler deutlich geringer ausfällt als im BSM-Fall:

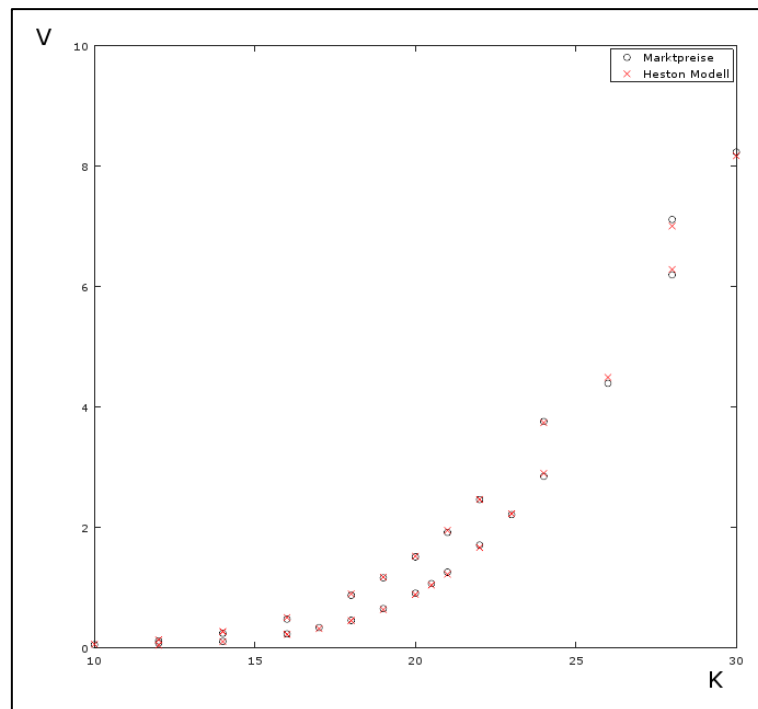


Abbildung 8: Vergleich Modell- und Marktpreise zur Kalibrierung im Heston Modell

In der nachfolgenden Tabelle 10 befindet sich eine Zusammenfassung der Modellparameter zur Bewertung des BRC im Heston Modell:

Tabelle 10: Modellparameter zur Bewertung des BRC im Heston Modell

Modellparameter	Notation	Wert
Initialer Basiswertpreis	S_0	22.83
Ausübungspreis	K	22.83
Initiale Volatilität des Basiswertes	σ	14.191%
Risikoloser Zinssatz ¹¹	r	-0.509%
Dividendenzahlung ¹²	D	0.74
Stetige Dividendenrendite	q	3.1899%

¹¹ Es handelt sich um den CHF 12-Monats LIBOR im Januar 2017 der SNB (2017).

¹² Angabe gemäss Informationen der Firmenwebseite (ABB, 2017).

Laufzeit	T	1.07397
Nominalwert	$Nominal$	1'000
Coupon	C	4.55%
Minimaler Aktienkurs	S_l	0
Barriere	B	17.12
Maximaler Aktienkurs	S_r	100
Minimale stochastische Varianz	v_{min}	0
Maximale stochastische Varianz	v_{max}	1
Anzahl Gitterpunkte im Preisintervall des Basiswertes	N	300
Anzahl Gitterpunkte im Zeitintervall	M	200
Anzahl Gitterpunkte im Varianzintervall	L	300
Rückkehrgeschwindigkeit der Varianz zum Mittelwert	κ	1.55806
Langzeitvarianz	θ	0.09521
Volatilität der Varianz	σ_{HM}	0.91194
Korrelationskoeffizient	ρ	-0.16940
Theta	θ_{FD}	0.5

4.4 Bewertung des BRC

Um einen BRC zu bewerten ist als Optionskomponente der Preis einer Down-and-In Put Option V zu berechnen. Wie bereits in Kapitel 4.2 erläutert, entspricht der Preis einer Down-and-In Put Option exakt der Differenz zwischen einer europäischen Put Option und einer Down-and-Out Put Option. Die Finite-Differenzen-Methode hat den Vorteil, dass durch die richtige Wahl des minimalen Basiswertpreises S_l bereits eine solche Down-and-Out Put Option bewertet werden kann. Der minimale Basiswertpreis S_l muss dafür gleich gesetzt werden mit der Barriere B . Dies funktioniert allerdings nur, wenn die

PDE mit einer Nullrandbedingung bei S_l approximiert wird. Diese Nullrandbedingung wurde im Heston Modell durch intrinsische Randbedingungen ersetzt (vgl. Kapitel 3.3.3.1). Diese Erweiterung muss zur Bewertung einer Down-and-Out, respektive einer Down-and-In Put Option wieder eliminiert werden.

Nach der Eliminierung ebendieser intrinsischen Randbedingung kann ein Down-and-Out Put korrekt bewertet werden. In der nachfolgenden Abbildung 9 sind illustrativ die Derivatpreise V einer solchen Down-and-Out Put Option bei verschiedenen Basiswertpreisen S und Varianzen v abgebildet. Berechnet wurde ebendiese Option mit der Routine `daoputHMFD`¹³

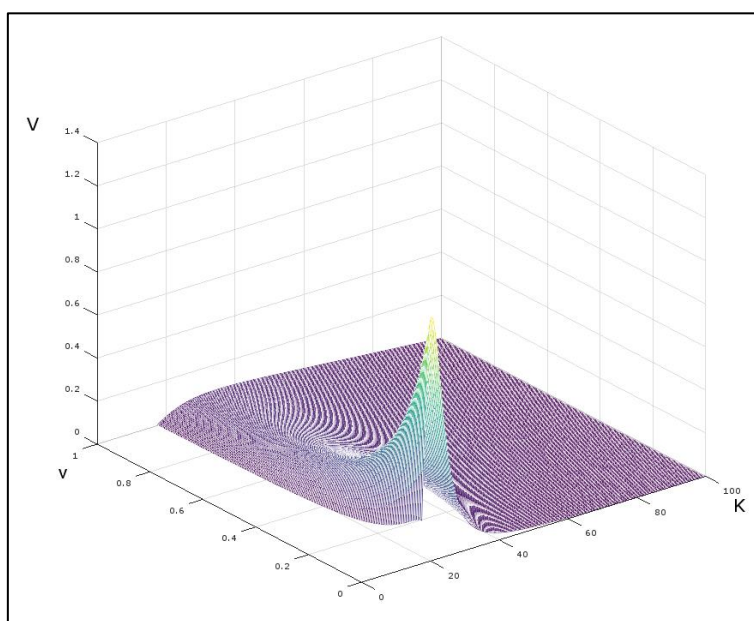


Abbildung 9: Derivatpreise einer Down-and-Out Put Option im Heston Modell

Schlussendlich wurde zur Bewertung des BRC die Routine `brcHMFD`¹⁴ erstellt. Sie verbindet die Bewertung einer Down-and-In Put Option, welche aus der Bewertung einer Down-and-Out Put Option in Kombination mit einer europäischen Option gebildet wird, mit der festverzinslichen Komponente und der Ratio n des BRC.

Zur Bewertung des BRC im BSM ist keine Anpassung in der Routine der europäischen Put Option mehr nötig, da die Nullrandbedingung bei S_l nicht eliminiert wurde. Somit

¹³ Diese Routine befindet sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

¹⁴ Diese Routine befindet sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

kann mit der bestehenden Routine bereits eine Down-and-In Put Option bewertet werden, indem wiederum die Differenz zwischen einer europäischen Put Option und einer Down-and-Out Put Option ($S_t = B$) berechnet wird. In Kombination mit der festverzinslichen Komponente und der Ratio n des BRC ergibt dies wiederum den Wert des BRC. Im BSM wurden dafür die Routine `daiputBSMFD` sowie `brcBSMFD`¹⁵ erstellt.

Die verschiedenen Bewertungen für den BRC werden in der nachfolgenden Tabelle 11 zusammengefasst.

Tabelle 11: Bewertungen des BRC im Heston Modell und im BSM

Berechnungsgrundlage	Bewertung des BRC (Zeitdauer)
Ausgabepreis	1000 (-)
Heston Modell	978.27 (626 Sekunden)
BSM	972.88 (0.06 Sekunden)

Das Heston Modell kommt somit auf eine Marge von:

$$Marge = \frac{1000 - 978.27}{1000} = 2.173\%$$

Das BSM kommt auf eine Marge von:

$$Marge = \frac{1000 - 972.88}{1000} = 2.712\%$$

¹⁵ Diese Routinen befinden sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

5 Analyse & Vergleich der Resultate

Die in Kapitel 4 berechneten Resultate werden in diesem Kapitel analysiert. Dafür werden neben den Markt- und Modellpreisen des BRC vor allem Preise von Plain Vanilla Put Optionen analysiert. Dies liegt daran, dass für diese Produkte effektive Marktdaten vorliegen, was für den BRC nicht der Fall ist. Neben einer reinen Analyse und einem Vergleich der berechneten Modellpreise mit effektiven Marktpreisen wird in diesem Kapitel eine Analyse anhand des Volatilitäts-Smiles sowie eine Geschwindigkeitsanalyse durchgeführt.

5.1 Vergleich von Modellbewertungen mit Marktpreisen

Aus den Modellbewertungen des Heston Modells sowie des BSM für den in Kapitel 4.1 definierten BRC sind einige grundlegende Aussagen möglich. Offenbar wird der BRC von der Vontobel Holding AG über seinem «Fair Value» ausgegeben. Dies ist daran erkennbar, als dass die Replikation ebendieses BRC günstiger ist, als der Ausgabepreis des BRC mit den angegebenen Konditionen. Im Vergleich zur Bewertung mit dem Heston Modell verdient die Vontobel Holding AG eine Marge von 2.173% bei der Ausgabe dieses Produkts. Diese Differenz ist somit nicht nur auf einen Pricing-Fehler zurückzuführen, sondern vielmehr auf die Tatsache, dass die Vontobel Holding AG, wie auch alle anderen Emittenten von strukturierten Produkten, mit dieser Differenz einen Teil ihrer Einnahmen generieren. Die Differenz gegenüber dem Ausgabepreis ist im BSM sogar 2.712%, also höher als im Heston Modell. Da allerdings der effektive Marktpreis des BRC, der dem Produkt angemessen ist und nicht durch Margen des Emittenten verzerrt wurde, nicht bekannt ist, wird für die weiterführende Analyse auf Plain Vanilla Put Optionen von der EUREX zurückgegriffen. Es handelt sich dabei um dieselben Marktoptionspreise, welche zur Kalibrierung der Modelle (vgl. Kapitel 4.3) verwendet wurden.

In der nachfolgenden Tabelle 12 befinden sich die Marktoptionspreise aus der Tabelle 15 im Anhang, inklusive der Angabe ihrer Ausübungspreise K sowie dem Verfallsdatum. Daneben befinden sich die Bewertungen per 20. Januar 2017 ebendieser Put Optionen im Heston Modell sowie im BSM inklusive den jeweiligen Differenzen zu den Marktpreisen. Diese Modellpreise wurden mithilfe der in Kapitel 3 eingeführten Routinen berechnet und basieren auf denselben Parametern, wie die Bewertung des BRC im Kapitel 4.4 (vgl.

Tabelle 9 und Tabelle 10) mit einer Anpassung der Werte N , M und L im Heston Modell auf $N = 200$, $M = 100$, $L = 200$. Diese Anpassung erfolgte aufgrund der extensiven Verwendung von Rechenleistung, welche bei $N = 300$, $M = 200$, $L = 300$ bereits zu einer verhältnismässig langen Rechenzeit zur Bewertung eines BRC geführt hat. Da in diesem Fall bereits 26 verschiedene Derivate bewertet werden müssen, muss die Anzahl der Gitterpunkte N, M, L zur Erhaltung der ökonomischen Sinnhaftigkeit der Methode reduziert werden. Die Berechnungen mit $N = 200$, $M = 100$, $L = 200$ führten zu Modellwerten, die auf vier Nachkommastellen identisch zu denjenigen sind, welche mit $N = 300$, $M = 200$, $L = 300$ berechnet wurden.

Tabelle 12: Modellbewertungen von Plain Vanilla Put Optionen

Aus- übungs- preis	Verfall	T	Markt- preis	Heston Preis	Differenz Heston	BSM Preis	Differenz BSM
12	15.12.2017	0.90137	0.08	0.0456	-0.0344	0.0020	-0.0780
14	15.12.2017	0.90137	0.11	0.1057	-0.0043	0.0205	-0.0895
16	15.12.2017	0.90137	0.235	0.2255	-0.0095	0.1098	-0.1252
17	15.12.2017	0.90137	0.34	0.3221	-0.0179	0.2122	-0.1278
18	15.12.2017	0.90137	0.46	0.4553	-0.0047	0.3732	-0.0868
19	15.12.2017	0.90137	0.655	0.6381	-0.0169	0.6066	-0.0484
20	15.12.2017	0.90137	0.91	0.8877	-0.0223	0.9227	0.0127
20.5	15.12.2017	0.90137	1.07	1.0439	-0.0261	1.1138	0.0438
21	15.12.2017	0.90137	1.26	1.2245	-0.0355	1.3272	0.0672
22	15.12.2017	0.90137	1.71	1.6681	-0.0419	1.8210	0.1110
23	15.12.2017	0.90137	2.215	2.2289	0.0139	2.4005	0.1855
24	15.12.2017	0.90137	2.85	2.9007	0.0507	3.0587	0.2087
26	15.12.2017	0.90137	4.395	4.4941	0.0991	4.5743	0.1793

28	15.12.2017	0.90137	6.195	6.2845	0.0895	6.2892	0.0942
30	15.12.2017	0.90137	8.235	8.1721	-0.0629	8.1329	-0.1021
10	15.06.2018	1.40000	0.055	0.0621	0.0071	0.0018	-0.0532
12	15.06.2018	1.40000	0.12	0.1364	0.0164	0.0182	-0.1018
14	15.06.2018	1.40000	0.245	0.2720	0.0270	0.0921	-0.1529
16	15.06.2018	1.40000	0.48	0.5068	0.0268	0.3023	-0.1777
18	15.06.2018	1.40000	0.875	0.8984	0.0234	0.7361	-0.1389
19	15.06.2018	1.40000	1.165	1.1772	0.0122	1.0574	-0.1076
20	15.06.2018	1.40000	1.515	1.5257	0.0107	1.4535	-0.0615
21	15.06.2018	1.40000	1.92	1.9535	0.0335	1.9245	0.0045
22	15.06.2018	1.40000	2.465	2.4664	0.0014	2.4681	0.0031
24	15.06.2018	1.40000	3.76	3.7406	-0.0194	3.7537	-0.0063
28	15.06.2018	1.40000	7.115	7.0055	-0.1095	6.9373	-0.1777

In der obigen Tabelle 12 wurden alle Zeilen grün hinterlegt, in welchen das Heston Modell Modellpreise V lieferte, die näher an den effektiven Preisen der Marktoptionen liegen, als die Modellwerte des BSM. Es ist deutlich erkennbar, dass das Heston Modell in 23 der 26 Fällen bessere Optionspreise V , i.e. Werte näher an den Marktpreisen, liefert, als das BSM. Allerdings ist auffällig, dass das BSM offenbar vor allem bei Derivaten am Geld, i.e. Optionen, die nahe bei ihrem Ausübungspreis K liegen, bessere Resultate lieferte als das Heston Modell. Allerdings liefert auch das Heston Modell bei diesen Optionspreisen V keinesfalls abfallend schlechte Resultate.

In der nachfolgenden Abbildung 10 befinden sich illustrativ dieselben Preise von Put Optionen V in Abhängigkeit des Ausübungspreises K . Es handelt sich um die Marktpreise (x), Heston Modell Preise (○) und BSM Modellpreise (+). In der illustrativen Darstellung sind, um die Übersicht zu wahren, nur die Put Optionen mit Verfall per 15. Dezember 2017 dargestellt.

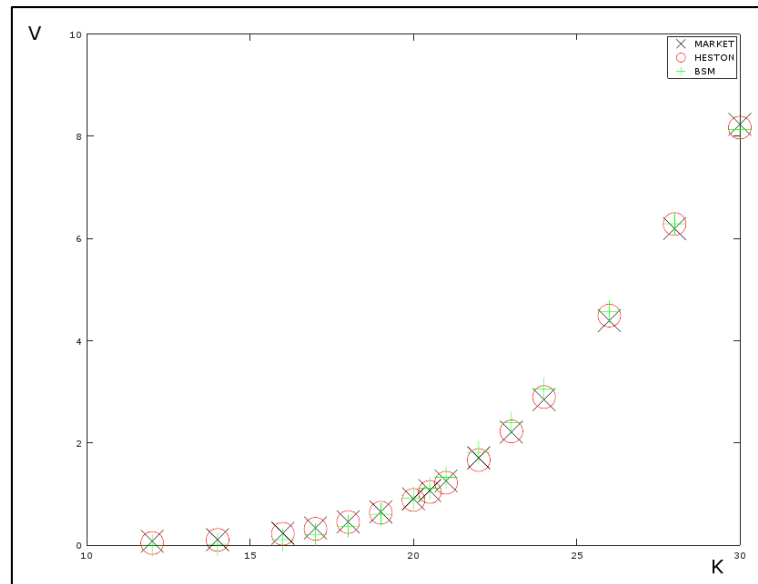


Abbildung 10: Plain Vanilla Marktpreise im Vergleich mit den Modellbewertungen

Die grafische Darstellung verdeutlicht, was bereits in obiger Tabelle 12 ersichtlich wurde. Der Fit des Heston Modells zu den Marktdaten erscheint deutlich genauer zu sein als derjenige des BSM, wobei die Preise von Put Optionen V aus dem Geld vom Heston Modell unterschätzt und die Preise von Put Optionen V im Geld überschätzt wurden. Auch das BSM unterschätzt die Preise von Put Optionen V bei tiefen Ausübungspreisen K und überschätzt sie bei hohen Ausübungspreisen K , allerdings sind die Abweichungen im Vergleich zum Heston Modell deutlicher.

5.2 Volatilitäts-Smile

Da es sich beim Heston Modell um ein Modell handelt, welches stochastische Volatilitäten modelliert, lohnt es sich, eine weitere Analyse durchzuführen. Dafür wird der sogenannte Volatilitäts-Smile analysiert. Beim Volatilitäts-Smile handelt es sich um eine grafische Darstellung der implizierten Volatilitäten σ , welche anhand des BSM aus Marktoptionspreisen, respektive Modellbewertungen berechnet werden. Würden die implizierten Volatilitäten σ in den BSM Modellbewertungen berechnet, würde eine exakt horizontale Linie als Volatilitäts-Smile resultieren, da in dem vorliegenden Beispiel alle Put Optionen mit derselben initialen Volatilität σ bewertet wurden. Aus verschiedenen empirischen Studien ist allerdings bekannt, dass die implizierten Volatilitäten σ von Marktoptionspreisen bei verschiedenen Ausübungspreisen K verschiedene Werte annehmen. Konkret kann auf verschiedene Weise bewiesen werden, dass die implizierte Volatilität σ in

einem negativen Zusammenhang mit dem Ausübungspreis K steht (Hull, 2012, S. 414). Die Gründe dafür können vielseitig sein. Hull (2012, S. 415) nennt hauptsächlich Leverage und «Crashophobia» als Hauptursachen für dieses Phänomen. Leverage bedeutet in diesem Zusammenhang, dass im Falle eines Rückgangs des Aktienwertes einer Gesellschaft ihr Leverage ansteigt und somit das Aktienkapital riskanter und damit volatiler wird. Ebenso verhält es sich auch umgekehrt. «Crashophobia» bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Optionen mit einem tiefen Ausübungspreis K von Händlern entsprechend höher bewertet werden, da sich diese vor einem Zusammenbruch der Aktienmärkte fürchten.

Die nachfolgende Tabelle 13 zeigt die implizierten Volatilitäten σ in einerseits den Marktoptionen und andererseits in den Modellbewertungen im Heston Modell. Die implizierten Volatilitäten σ wurden dafür mit der Routine `europutimplvolaBSMCF`¹⁶ berechnet. Diese Routine lehnt sich stark an diejenige von Hilber (2016b, S. 16) an, wurde allerdings auf das konkret vorliegende Problem angepasst. Im Grundsatz erfolgt, die Approximation der implizierten Volatilitäten σ unter der Verwendung des Newton-Verfahrens. Das Vorgehen ist identisch mit demjenigen, welches für die Kalibrierung des BSM verwendet wurde (vgl. Kapitel 4.3.1) mit der Vereinfachung, dass das Verfahren hierzu für einzelne Optionspreise V angewandt wurde.

Tabelle 13: Implizierte Volatilitäten von Markt- und Modellpreisen:

Ausübungs- preis	Verfall	Marktpreis	Implizierte Volatilität	Heston Preis	Implizierte Volatilität
12	15.12.2017	0.08	35.83%	0.0456	32.54%
14	15.12.2017	0.11	29.66%	0.1057	29.42%
16	15.12.2017	0.235	26.84%	0.2255	26.54%
17	15.12.2017	0.34	25.63%	0.3221	25.19%
18	15.12.2017	0.46	24.02%	0.4553	23.92%

¹⁶ Diese Routine befindet sich im Anhang unter der Kategorie «Matlab Routinen».

19	15.12.2017	0.655	23.04%	0.6381	22.76%
20	15.12.2017	0.91	22.06%	0.8877	21.75%
20.5	15.12.2017	1.07	21.66%	1.0439	21.31%
21	15.12.2017	1.26	21.39%	1.2245	20.94%
22	15.12.2017	1.71	20.91%	1.6681	20.41%
23	15.12.2017	2.215	20.02%	2.2289	20.19%
24	15.12.2017	2.85	19.62%	2.9007	20.26%
26	15.12.2017	4.395	19.46%	4.4941	21.03%
28	15.12.2017	6.195	20.24%	6.2845	22.15%
30	15.12.2017	8.235	24.92%	8.1721	23.34%
10	15.06.2018	0.055	33.42%	0.0621	34.09%
12	15.06.2018	0.12	30.36%	0.1364	31.17%
14	15.06.2018	0.245	27.81%	0.2720	28.59%
16	15.06.2018	0.48	25.83%	0.5068	26.33%
18	15.06.2018	0.875	24.12%	0.8984	24.43%
19	15.06.2018	1.165	23.51%	1.1772	23.65%
20	15.06.2018	1.515	22.90%	1.5257	23.01%
21	15.06.2018	1.92	22.19%	1.9535	22.53%
22	15.06.2018	2.465	22.21%	2.4664	22.22%
24	15.06.2018	3.76	22.30%	3.7406	22.11%
28	15.06.2018	7.115	24.59%	7.0055	23.16%

Die implizierten Volatilitäten σ wurden anschliessend in den nachfolgenden Abbildungen einander gegenübergestellt.

Es handelt sich dabei bei der Abbildung 11 um die Put Optionen, welche am 15. Dezember 2017 verfallen und bei der Abbildung 12 um die Put Optionen, welche am 15. Juni 2018 verfallen:

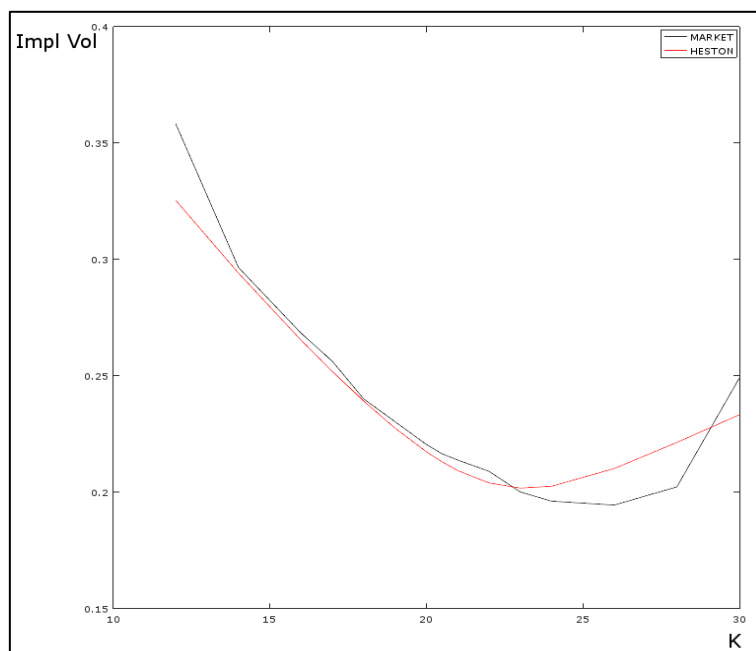


Abbildung 11: Volatilitäts-Smile Markt- und Modellpreise (T=15. Dezember 2017)

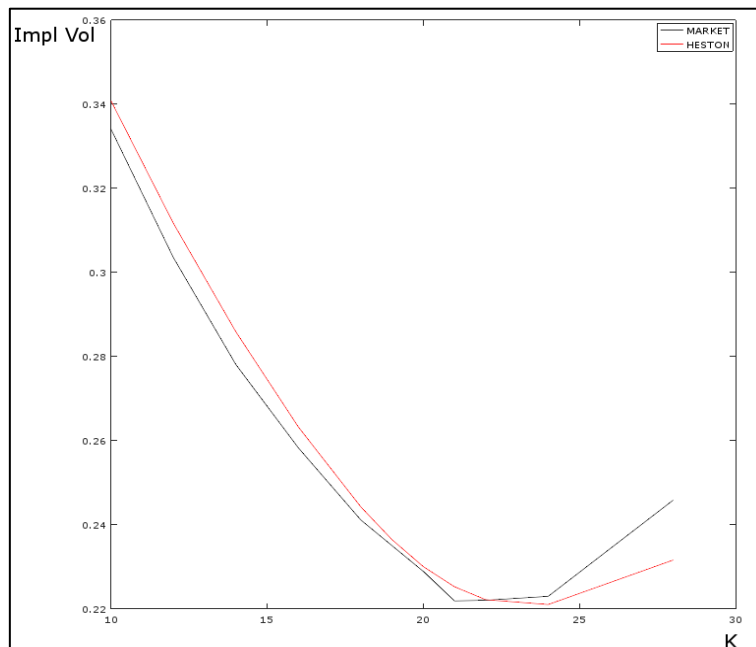


Abbildung 12: Volatilitäts-Smile Markt- und Modellpreise (T=15. Juni 2018)

Der negative Zusammenhang zwischen dem Ausübungspreis K und den implizierten Volatilitäten σ ist in beiden Abbildungen deutlich zu erkennen. Auch der erneute Anstieg

der implizierten Volatilitäten σ bei Put Optionen, welche sich aktuell im Geld befinden (vgl. Hilber, 2016b, S. 195-196) ist im Heston Modell für beide Verfallsdaten zu beobachten. Alles in allem kann festgestellt werden, dass, obwohl der Fit für den Verfall am 15. Juni 2018 allgemein besser zu passen scheint als derjenige für den 15. Dezember 2017, der Volatilitäts-Smile mit dem Heston Modell einigermaßen adäquat nachgebildet werden kann. Dies deutet auf ein zuverlässiges und marktgerechtes Modell hin. Im Grossen und Ganzen scheint der Fit bei Put Optionen, welche sich aus dem Geld befinden besser zu passen, als bei Put Optionen, welche aktuell über ihrem Ausübungspreis K notieren. An diesem Punkt setzen diverse Erweiterungen des Heston Modells an (vgl. Kapitel 6.2).

5.3 Analyse der Geschwindigkeit

In der ursprünglichen Problemdefinition wurde, neben der Genauigkeit der Modellwerte, ein Augenmerk auf die praktische Einsetzbarkeit des Modells gelegt. Dafür wurde die Zeitdauer der Berechnung von adäquaten Derivatpreisen V im Heston Modell als stellvertretende Grösse für die ökonomische Einsatzbarkeit definiert. In der nachfolgenden Tabelle 14 wurde die benötigte Zeit zur Bewertung einer europäischen Put Option in Abhängigkeit von verschiedenen Werten für N und L ceteris paribus berechnet. Die Anzahl Zeitschritte wurde in dieser Analyse konstant bei $M = 100$ festgesetzt. Neben der benötigten Zeit wird der prozentuale Fehler zur closed form Lösung angegeben:

Tabelle 14: Zeitdauer für die Berechnung adäquater Resultate im Heston Modell

Anzahl N	Anzahl L	Zeitdauer	Prozentualer Fehler
10	10	0.11 Sekunden	38.24%
20	20	0.31 Sekunden	11.03%
40	40	1.1 Sekunden	4.91%
80	80	6.5 Sekunden	0.04%
160	160	31.9 Sekunden	0.19%
320	320	287 Sekunden	0.02%

Aus diesen Angaben kann gefolgert werden, dass die Bewertung einer Put Option im Heston Modell deutlich mehr Zeit benötigt als im BSM, in welchem die benötigte Zeit zur Berechnung numerischer Modellbewertungen anhand der Finite-Differenzen-Methode zu vernachlässigen ist. Im Vergleich zu anderen Methoden, wie der Monte-Carlo-Simulation, sind die Zeiten allerdings in einem angemessenen Rahmen. Die Bewertung einer Put Option dauert also zwischen 1,5 und 4 Minuten und liefert damit bereits adäquate Genauigkeiten. Die Bewertung eines BRC dauert entsprechend länger, da zwei verschiedene Put Optionen bewertet werden müssen. Es muss dabei angemerkt werden, dass diese Resultate mit einem handelsüblichen Laptop für den privaten Gebrauch berechnet wurden. Emittenten und Händler von solchen Produkten dürften dabei um einiges mehr Rechenleistung zur Verfügung haben, was die Geschwindigkeit zur Berechnung von Modellwerten deutlich erhöhen dürfte.

5.4 Schlussfolgerungen

Abschliessend kann gefolgert werden, dass das Heston Modell konsistent bessere Resultate liefert als das BSM. Bessere Resultate in diesem Sinne bedeutet, dass die Modellwerte, welche im Heston Modell anhand der Finite-Differenzen-Methode berechnet wurden, näher an effektiven Marktpreisen zu liegen kommen, als die Modellbewertungen im BSM. Dies konnte einerseits anhand der effektiven Differenzen zwischen den Modellwerten und den Marktpreisen gezeigt werden (vgl. Tabelle 12). In diesem Vergleich kamen 23 der beobachteten 26 Modellwerte näher an die Marktpreise ebendieser Put Optionen heran. Andererseits konnte anhand des Volatilitäts-Smiles gezeigt werden, dass das Heston Modell, den für Put Optionen typischen Verlauf der implizierten Volatilitäten σ im Grossen und Ganzen generieren kann. Auch die Geschwindigkeit, welche im Heston Modell benötigt wird um adäquate Modellbewertungen zu erhalten, liegt in einem vernünftigen Rahmen. Für die Bewertung einer europäischen Put Option werden zwischen 1.5 und 4 Minuten benötigt. Demzufolge dauert die Bewertung eines BRC im vorliegenden Modell zwischen 2 und 6 Minuten, je nach gewählter Anzahl N , L und M .

6 Alternative Lösungsansätze und Modellerweiterungen

Das Standard Heston Modell, welches in den vergangenen Kapiteln erarbeitet und anhand einer Variante der Finite-Differenzen-Methode approximiert wurde, hat in den letzten Jahrzehnten diverse Erweiterungen in verschiedenen Hinsichten erfahren. Um eine zielführende Abhandlung über die Erweiterungen durchzuführen, wird hiermit zwischen alternativen Verfahren zur Approximation des Modells und Erweiterungen des Modells selber unterschieden.

In den nachfolgenden Abschnitten werden in einem ersten Teil alternative Methoden zur Approximation des herkömmlichen Heston Modells erläutert. Dafür bleibt das ursprüngliche Heston Modell unverändert. Danach folgt eine kurze Abhandlung zu den Erweiterungen des Heston Modells, in welcher das herkömmliche Heston Modell ergänzt, respektive verändert wird. Es ist dabei anzumerken, dass sich diese Analyse auf Modelle beschränkt, die im Fokus für die Bewertung von Aktienderivaten liegen. Modelle zur Optimierung in den Bereichen von Währungs- oder Zinsderivaten sowie anderen Produkten oder Märkten werden dabei nicht weiter, respektive gesondert betrachtet.

6.1 Alternative Lösungsansätze

In diesem Abschnitt werden einige Verfahren, zur Approximation von Derivatpreisen V im Heston Modell vorgestellt. Zum einen folgen Möglichkeiten innerhalb der Finite-Differenzen-Methode und zum anderen wird kurz auf die Möglichkeiten einer Monte-Carlo-Simulation eingegangen. Weitere Methoden werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

6.1.1 Modifikationen der Finiten-Differenzen-Methode

Innerhalb der Finite-Differenzen-Methode gibt es einige Erweiterungen zur herkömmlichen Variante, welche im bisherigen Verlauf dieser Arbeit angewandt wurde. Dazu zählt unter anderem das Alternative Direction Implicit [ADI] Schema. Dieses Schema liefert eine alternative Weise zur Approximation der Derivatpreisen V an verschiedenen Zeitpunkten t . Anstelle von den bislang verwendeten Vorwärts-, Rückwärts- und zentralen Differenzenquotienten verwendet dieses Schema halbe Zeitschritte $\frac{t}{2}$ und diskretisiert in einem ersten Schritt implizit nach dem Basiswertpreis S und explizit nach der Varianz v .

Danach folgt eine explizite Diskretisierung nach dem Basiswertpreis S und eine implizite Diskretisierung nach der Varianz v (Hirsa, 2013, S. 156). Dieses Schema bringt den Vorteil mit sich, dass sich die tridiagonale Struktur in der Blockmatrix A (vgl. Kapitel 3.3.1), welche in der Verwendung der herkömmlichen Finite-Differenzen-Methode nicht mehr gegeben ist, beibehalten lässt, was wiederum eine Verbesserung der Rechenzeit zur Folge hat (Hirsa, 2013, S. 156 & 163). Da das ADI Schema bei Problemen mit hohen Korrelationen ρ zu Instabilität neigt, wurde wiederum eine Erweiterung ebendieses Schemas gefunden. Es handelt sich dabei um das sogenannte Craig-Sneyd [CS] Schema (Hirsa, 2013, S. 158).

Eine weitere Modifikation der Finiten-Differenzen-Methode, wie sie in dieser Arbeit verwendet wurde, stellt die Aufteilung des Gitternetzes G dar. In dieser Arbeit wurden ausschliesslich äquidistante Gitter G verwendet. Hirsa (2013, S. 161-164) verwendet in seinem Beispiel allerdings nicht-einheitliche Gitter G . Diese haben den Vorteil, dass genauere Beobachtungen der Derivatивpreise V an kritischen Punkten innerhalb des Gitters G gemacht werden können (Hirsa, 2013, S. 126). Zu diesen kritischen Punkten zählen beispielsweise Basiswertpreise S nahe am Ausübungspreis K sowie nahe an der Barriere B . Diese Punkte sind in einem nicht-einheitlichen Gitter G genauer zu beobachten. Hirsa (2013, S. 126-129) gibt eine Anleitung zur Bildung eines nicht-einheitlichen Gitters G und den entsprechenden Differenzenquotienten, die zur Approximation der Derivatивpreise V an den verschiedenen Gitterpunkten N, M, L benötigt werden, vor. Er legt dabei den Fokus auf eine Konzentration auf Basiswertpreise S nahe an einer Barriere B . Diese Erweiterung um ein nicht-einheitliches Gitter G macht zwar intuitiv Sinn, allerdings ist der Zusatznutzen in Form von adäquateren Resultaten, welche durch dieses kompliziertere Verfahren erzielt werden können, kritisch zu hinterfragen.

6.1.2 Monte-Carlo-Methoden

Eine Monte-Carlo-Simulation versucht ein analytisch nicht lösbares Problem durch die Generierung eines grossen Volumens an möglichen Lösungen in Form einer Stichprobe des ganzen Lösungsuniversums zu approximieren. Der mittlere Wert dieser Stichproben stellt dabei die approximierte Lösung des Problems dar (Glasserman, 2003, S. 1). Das Gesetz der grossen Zahlen stellt dabei sicher, dass die Approximation mit Zunahme der

Anzahl Stichproben zum effektiven Wert konvergiert (Glasserman, 2003, S. 1). Am Beispiel einer gBB als Basis für die Entwicklung eines Basiswertpreises S , wie sie dem BSM zugrunde liegt, werden viele verschiedene Basiswertverläufe in Form von zufälligen Pfaden generiert. Der Endwert eines jeden Pfades, i.e. der Basiswertpreis S bei Maturität T entspricht dabei einer möglichen Lösung. Unter Zuzug der Auszahlungsfunktion g , kann somit der Endwert eines Derivates bestimmt werden. Der mittlere Endwert dieser grossen Zahl an möglichen Endwerten entspricht nach der Abdiskontierung dem heutigen Wert des Derivates. Im BSM Fall lässt sich eine Monte-Carlo-Simulation hindernisfrei anwenden, da die BSM SDE über eine eindeutige Lösung verfügt, was beim Heston Modell nicht der Fall ist (vgl. Kapitel 1.4).

Trotzdem kann die Monte-Carlo-Methode auch auf das Problem des Heston Modells angewendet werden. Neben den grundsätzlichen Werkzeugen der Monte-Carlo-Methoden, wie beispielsweise der Generierung von zufälligen Zahlen (vgl. Glasserman, 2003, S. 39), der Generierung von zufälligen Pfaden, die einer gBB folgen (vgl. Glasserman, 2003, S. 79), bedarf es für die Anwendung der Monte-Carlo-Methoden im Heston Modell ein Diskretisierungsschema für die zweistufige SDE (vgl. Kapitel 1.4). Hirt (2013, S. 232 - 233) führt ebendieses für den konkreten Fall des Heston Modells ein. Er diskretisiert dabei zuerst den Varianzprozess und danach den Basiswertprozess. Beide Diskretisierungen werden mithilfe einer Euler Diskretisierung durchgeführt. Eine Anwendung der Monte-Carlo-Methoden auf das Heston Modell würde Inhalte für eine ganze Arbeit wie diese liefern, weswegen nicht weiter auf die Spezifikationen ebendieser eingegangen wird.

6.2 Modellerweiterungen

In diesem Abschnitt wird eine Auswahl an Modellen vorgestellt, die auf demjenigen von Heston aufbauen. Dabei handelt es sich um Erweiterungen um die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten im Heston Modell, das Double Heston Modell, Erweiterungen um Kurs-sprünge des Basiswertes S sowie einen kurzen Kommentar zu Erweiterungen im Bereich der Modellierung der Zinskomponente r . Diese Abhandlung beschränkt sich auf eine Auswahl von Modellen, die in der Wissenschaft und in der Praxis von Bedeutung sind und welche auf dem Heston Modell aufbauen. Andere Volatilitätsmodelle, die durchaus

ihre Relevanz und somit ihre praktische Existenzberechtigung besitzen, wie beispielsweise das Constant Elasticity of Variance [CEV] Modell oder das Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity [GARCH] Modell sowie viele mehr, werden dabei nicht erläutert.

6.2.1 Zeitabhängige Parameter im Heston Modell

Gemäss Rouah (2013, S. 263) stellt die Zeitabhängigkeit der Parameter im Heston Modell eine der naheliegenden und daher zentralsten Erweiterungen des Heston Modells dar. Diese Erweiterung versucht vor allem der Schwäche des Heston Modells, welches die implizierte Volatilität σ für Derivate mit kurzen Laufzeiten T nicht adäquat schätzen kann, Herr zu werden. Die Analyse der Volatilitäts-Smiles hat auch in dieser Arbeit gezeigt, dass der Fit für die längerfristigen Put Optionen besser zu passen scheint als derjenige für die eher kurzfristigen Put Optionen (vgl. Kapitel 5.2).

Die Erweiterungen des Heston Modells um die Zeitabhängigkeit der Parameter hat verschiedene Modelle hervorgebracht. Die Idee hinter dieser Erweiterung wird hier kurz anhand des Mikhailov und Nögel Modells illustriert. Das Modell an sich sowie die Parameter, welche dem Heston Modell zugrunde liegen, bleiben in dieser Erweiterung gleich. Auch bleibt die Schätzung ebendieser Parameter für ein einzelnes Derivat gleich. Was sich ändert ist die Schätzung der Parameter über ein ganzes Feld von Derivaten. So werden die Parameter für verschiedene Maturitäten der Derivate verschieden geschätzt. Dies bedeutet, dass sie somit zeitabhängig, im Sinne von Differenzen zwischen den Schätzparametern diverser Maturitäten, sind (Rouah, 2013, S. 271).

Im konkreten Mikhailov und Nögel Modell werden die Parameter rekursiv von der kurzfristigsten Maturität bis zur letzten Maturität geschätzt (Rouah, 2013, S. 271). Die Korrelationskoeffizienten ρ , die den Verlauf des Volatilitäts-Smiles bestimmen (vgl. Kapitel 6.2.2), können so für jede Maturität neu bestimmt werden. Somit ist es nicht verwunderlich, dass der Fit der Volatilitäts-Smile, auch für kurzfristige Maturitäten, deutlich besser passt als beim klassischen Heston Modell mit einer einheitlichen Schätzung der Parameter über verschiedene Maturitäten hinweg (Rouah, 2013, S. 277).

Neben dem Mikhailov und Nögel Modell handelt es sich bei dem Elices Modell (Rouah, 2013, S. 278-285) sowie dem Benhamou-Miri-Gobet Modell (Rouah, 2013, S. 285-298)

um Modelle derselben Erweiterungen. Sie alle verwenden verschiedene Schätzparameter für verschiedene Maturitäten. Das Elices Modell funktioniert dabei ähnlich wie das Mikhailov und Nögel Modell. Das Benhamou-Miri-Gobet Modell, welches 2010 präsentiert wurde, findet hingegen eine analytische Erweiterung und ist daher in der Lage deutlich schneller Resultate zu liefern, als die beiden anderen Modellerweiterungen (Rouah, 2013, S. 300).

6.2.2 Double Heston Modell

Das Double Heston Modell ist analog zu den Erweiterungen um zeitabhängige Parameter im Heston Modell ein Ansatz, um den Fit der Volatilitäts-Smiles vor allem bei kurzfristigen Derivaten zu verbessern. Der Verlauf des Volatilitäts-Smiles ist stark abhängig von der Wahl des Korrelationskoeffizienten ρ . Wird $\rho \approx 0$ gewählt, verläuft der Volatilitäts-Smile symmetrisch. Sobald die Wahl in Richtung $\rho \pm 1$ geht, verläuft der Volatilitäts-Smile stark asymmetrisch mit einer starken negativen Steigung bei $\rho \approx -1$ und einer starken positiven Steigung bei $\rho \approx 1$ (Rouah, 2013, S. 358). Dieses Wissen wird im Double Heston Modell verwendet, indem mehr als nur ein Korrelationskoeffizient ρ zugelassen wird. Dafür wird das Modell, respektive der Varianzprozess innerhalb des Heston Modells, auf zwei verschiedene Prozesse, die wiederum untereinander korrelieren, aufgeteilt (Rouah, 2013, S. 357-358). Die Wirksamkeit des zweiten Varianzprozesses innerhalb des Heston Modells zeigt sich deutlich. Rouah (2013, S. 371) zeigt, dass mit der Einführung ebendieser Erweiterung der Fit im Volatilitäts-Smile auch für kurzfristige Derivate mit einer Laufzeit $T = 37 \text{ Tage}$, respektive $T = 72 \text{ Tage}$, deutlich besser passt als derjenige des klassischen Heston Modells.

6.2.3 Sprung-Erweiterungen

Eine andere Erweiterung des Heston Modells besteht aus der Kombination des Heston Modells mit dem Merton Modell. Um diese Modelle zu verstehen ist daher eine kurze Einführung in das Merton Modell unabdingbar. Merton (1976, S. 125) erweitert das herkömmliche BSM, welches einen Basiswert S als kontinuierlichen Pfad eines stochastischen Prozesses modelliert, um eine Sprung-Komponente. In diesem Modell folgt ein Basiswert S einer Kombination aus beiden Komponenten. Die kontinuierlichen Verände-

rungen werden, wie auch im BSM, anhand einer gBB modelliert. Die Sprung-Komponente hingegen modelliert Sprünge eines Basiswertpreises S welche nicht mehr kontinuierlich sind. Merton (1976, S. 127) beschreibt ein solches Ereignis beispielsweise als Ankunft von wichtigen neuen Informationen auf dem Markt oder ähnlichen Vorkommnisse. Wichtig ist dabei anzumerken, dass die «aktiven» und «ruhigen» Zeiten zufällig sind. Diese Sprünge werden mithilfe eines Prozesses modelliert, der einer Poisson-Verteilung folgt. Die Poisson-Verteilung ist dabei ausschlaggebend für die Anzahl der Sprünge in einem vordefinierten Zeitintervall.

Diese Erweiterung des BSM wurde später mit dem Heston Modell kombiniert. Dabei resultierte zum einen das Bates Modell. In diesem Modell folgt der Basiswertpreis S im Grunde einem Prozess, wie ihn Merton (1976) vorgeschlagen hat. Daneben verläuft die stochastisch modellierte Volatilität \sqrt{v} anhand eines Prozesses wie ihn Heston (1993) vorgeschlagen hat (Bates, 1996, S. 72). Bates Erweiterung führt dazu, dass der Fit eines Volatilitäts-Smiles (vgl. Kapitel 5.2) im Vergleich zum Heston Modell verbessert werden kann (vgl. Hilber, 2016b, S. 196). Bei einer anderen Erweiterung in diesem Zusammenhang handelt es sich um das Scott Modell. Scott (1997, S. 413) kombiniert in seinem Ansatz die gleichen Prozesse für den Basiswert S sowie die stochastische Volatilität \sqrt{v} wie Bates (1996) unter der Zulassung einer stochastischen Modellierung des zugrundeliegenden Zinssatzes r . Er erachtet diese Erweiterung als sinnvoll, da Zinsänderungen negativ mit den Renditen eines Basiswertes S korreliert sind. Das Scott Modell resultiert in einer closed form Lösung, welche mithilfe der Fourier Inversion Formel gefunden wurde. Konkludierend findet Scott (1997, S. 423-425) empirische Unterstützung für sämtliche Faktoren in seinem Modell, also auch für die stochastische Modellierung der Zinskomponente r .

6.2.4 Modellierung der Zinskomponente

Mittlerweile existieren diverse Modelle, die Zinskomponenten stochastisch modellieren. Es handelt sich dabei allerdings zum grössten Teil um Modelle, die für Zinsderivate oder andere zinssensitive Produkte angedacht wurden, welche nicht Thema dieser Arbeit sind. Aus diesem Grund werden Erweiterungen im Bereich der Modellierung der Zinskomponente in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

7 **Fazit**

Als Konklusion der vorliegenden Masterthesis folgt nun ein kurzes Fazit inklusive einer kritischen Würdigung des Heston Modells unter Berücksichtigung der erzielten Resultate. Daneben werden die Schwachstellen dieser Arbeit kurz erläutert. Ganz allgemein kann festgehalten werden, dass die Replikation des Heston Modells mit Hilfe der Finite-Differenzen Methode gelungen ist. Das replizierte Modell ist in der Lage, in einer angemessenen Zeit einen beliebigen BRC in adäquater Weise zu bewerten. Des Weiteren sind die Matlab Routinen zur Bewertung von Derivaten im Heston Modell durch Anpassung der impliziten Auszahlungsfunktion leicht auf alternative Problemstellungen anpassbar. Daneben gibt die vorliegende Arbeit einen klaren Überblick über den Aufbau der Finite-Differenzen-Methoden und das Heston Modell sowie die Verbindung dieser beiden Elemente. Ausserdem bietet sie einen sauberen Überblick über die selbstgenerierten Matlab Routinen zu den entsprechenden Problemen.

7.1 **Kritische Würdigung des Heston Modells**

In Kapitel 5 konnte gezeigt werden, dass das Heston Modell einerseits in der Lage ist, bei 23 von 26 geprüften Aktienoptionen auf die ABB Aktie, welche an der Schweizer Börse gehandelt wird, bessere Resultate als das BSM zu liefern. Es kann also gefolgert werden, dass das Heston Modell im Vergleich zum BSM konsistent bessere Resultate, zumindest über ein breites Feld von Derivaten hinweggesehen, liefern kann. Andererseits ist das Heston Modell in der Lage den effektiven Volatilitäts-Smile, welcher durch Marktpreise generiert werden kann und somit als empirische Tatsache angesehen werden darf, einigermaßen nachzubilden. Die Resultate zeigen, dass das Heston Modell durchaus eine Existenzberechtigung hat und dass es unbestritten zu den Basismodellen im Bereich der stochastischen Volatilitätsmodelle gezählt werden darf. Dies ist vor allem auch auf die Anwesenheit einer closed form Lösung zurückzuführen, welche einfache Tests der Modelle zulässt. Nichtsdestotrotz geht aus dem Kapitel 6.2 deutlich hervor, dass für professionelle Marktteilnehmer eine Erweiterung des Heston Modells von grösserem Nutzen sein dürfte als das ursprüngliche Modell, da mit den diversen Erweiterungen genauere Modellergebnisse zu erwarten sind. Bergomi (2016, S. 213-215) kritisiert das Heston Modell daher auch vor allem für seinen Mangel an Flexibilität und Genauigkeit.

Abschliessend kann ausgesagt werden, dass das Heston Modell einen guten Einstieg in stochastische Volatilitätsmodelle liefert. Mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode können bereits gute und konsistente Modellbewertungen für europäische Optionen innerhalb einer angemessenen Zeitdauer von 1.5 bis 4 Minuten erreicht werden. Die adäquate Bewertung eines BRC dauert dabei etwa 2 bis 6 Minuten, je nach Wahl der Anzahl Gitterpunkte N, M, L .

7.2 Schwachstellen dieser Arbeit

Die Schwachstellen in dieser Arbeit befinden sich hauptsächlich im Teil der Analyse, wo deutlich mehr Derivate hätten bewertet werden können, um ein aussagekräftigeres Bild von den Fähigkeiten des Heston Modells zu erhalten. Allerdings war es nicht Ziel der vorliegenden Arbeit eine empirische Studie über die Adäquanz der Modellbewertungen im Heston Modell durchzuführen, weswegen auf weitere Tests verzichtet wurde. Des Weiteren beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf die Implementierung des ursprünglichen Heston Modells und lässt die Erweiterungen, mit Ausnahme einer theoretischen Abhandlung, weg.

Literaturverzeichnis

- ABB. (2017). Dividend information. Abgerufen am 20. März 2017 von <http://new.abb.com/investorrelations/share-information/dividend>
- Bates, D. S. (1996). Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 9, No. 1, S. 69 - 107.
- Bergomi, L. (2016). *Stochastic Volatility Modeling*. Boca Raton FL: Chapman & Hall/CRC.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, S. 637 - 654.
- Bloomberg. (2017). Abgerufen am 28. März 2017 von Bloomberg Datenbank
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2013). *Essentials of Investments* (9. Ausg.). New York: McGraw-Hill Education.
- Crisóstomo, R. (2014). An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab. *CNMV Working Paper No. 58. Madrid*.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, S. 327 - 343.
- Hilber, N. (2016a). Vorlesungsskript Structured Products von Dr. Norbert Hilber. *Herbstsemester 2016*. Winterthur: ZHAW School of Management and Law, Institut für Wealth & Asset Management.
- Hilber, N. (2016b). Vorlesungsskript Bewertung von Finanzderivaten von Dr. Norbert Hilber. *Herbstsemester 2016*. Winterthur: ZHAW School of Management and Law, Institut für Wealth & Asset Management.

- Hirsa, A. (2013). *Computational Methods in Finance*. Boca Raton FL: Chapman & Hall/CRC.
- Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, And Other Derivatives* (8. Ausg.). Harlow: Pearson Eductaion Limited.
- Hull, J. C., & White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, S. 281 - 300.
- Jarrow, R. A. (2010). Option Pricing Theory: Historical Perspectives. In R. Cont, *Encyclopedia of Quantitative Finance* (S. 1331 - 1340). Chichester: John Wiley & Sons.
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, S. 141 - 183.
- Merton, R. C. (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, S. 125 - 144.
- Rouah, F. D. (2013). *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#*. Hoboken NJ: John Wiley & Sons.
- Scott, L. O. (1997). Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Application of Fourier Inversion Methods. *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 4, S. 413 - 424.
- SNB. (2017). Datenportal der Schweizerischen Nationalbank - Zinssätze und Devisenkurse. Abgerufen am 20. März 2017 von <https://data.snb.ch/de/topics/ziredev#!/cube/zimoma>
- SVSP. (2017). Strukturierte Produkte Pro - Produktfinder. Abgerufen am 20. März 2017 von <http://www.svsp-verband.ch/strukturierte-produkte-pro/#!/section-product-finder?r=>
- Teneng, D. (2011). Limitations of the Black-Scholes model. *International Research Journal of Finance and Economics*, Vol. 68, S. 99 - 102.
- Vontobel Holding AG. (2017). Derinet - Anlageprodukte. Abgerufen am 20. März 2017 von https://derinet.vontobel.com/CH/DE/Produkte/Produkte_finden/Anlageprodukte

Anhang

Matlab Routinen

Black-Scholes Europäischer Call (closed form)

```
function[C]=eurocallBSMCF(S0,K,r,sigma,T,D)
q=log(1+D/S0);
d1=((log(S0/K)+(r-q+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*(T)^0.5));
d2=d1-sigma*T^0.5;
C=S0.*exp(-q*T)*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);
```

Black-Scholes Europäischer Put (closed Form)

```
function[P]=europutBSMCF(S0,K,r,sigma,T,D)
q=log(1+D/S0);
d1=((log(S0/K)+(r-q+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*(T)^0.5));
d2=d1-sigma*T^0.5;
P=K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S0*exp(-q*T)*normcdf(-d1);
```

Black-Scholes Europäischer Call (Finite-Differenzen-Methode)

```
function [v] = euro-
callBSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,N,M,theta)
%Definitionen
h=(sr-sl)/(N+1);
k=T/M;
s=(sl:h:sr)';
q=log(1+D/S0);
g=@(s)max(s-K,0);
% Koeffizientenmatrix
a=@(s)-1/2*sigma^2*s.^2;
b=@(s)-(r-q)*s;
c=r;
alpha=a(s(3:end))/h^2-b(s(3:end))/(2*h);
beta=-(2*a(s(2:end-1)))/h^2+c;
gamma=a(s(1:end-2))/h^2+b(s(1:end-2))/(2*h);
A = spdiags([alpha beta gamma],[-1:1,N,N]);
%full(A);
w=g(s(2:end-1));
I = speye(N);
links=I+k*theta*A;
rechts=I-k*(1-theta)*A;
for j = 1:M, w = links\ (rechts*w); end
v = interp1(s(2:end-1),w,S0);
```

Black-Scholes Europäischer Put (Finite-Differenzen-Methode)

```

function [v] = europut-
BSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,N,M,theta)
%Definitionen
h=(sr-sl)/(N+1);
k=T/M;
s=(sl:h:sr)';
q=log(1+D/S0);
g=@(s)max(K-s,0);
% Koeffizientenmatrix
a=@(s)-1/2*sigma^2*s.^2;
b=@(s)-(r-q)*s;
c=r;
alpha=a(s(3:end))/h^2-b(s(3:end))/(2*h);
beta=-(2*a(s(2:end-1)))/h^2+c;
gamma=a(s(1:end-2))/h^2+b(s(1:end-2))/(2*h);
A = spdiags([alpha beta gamma],[-1:1,N,N]);
%full(A);
w=g(s(2:end-1));
I = speye(N);
links=I+k*theta*A;
rechts=I-k*(1-theta)*A;
for j = 1:M, w = links\(rechts*w); end
v = interp1(s(2:end-1),w,S0);

```

Black-Scholes Down-and-In Put (Finite-Differenzen-Methode)

```

function [vdai] = dai-
putBSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,sl,B,sr,N,M,theta)
europut=europutBSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,N,M,theta);
dao=europutBSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,B,sr,N,M,theta);
vdai=europut-dao;

```

Black-Scholes BRC (Finite-Differenzen-Methode)

```

function [brc] = brcBSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,Nomi-
nal,C,sl,B,sr,N,M,theta)
%DAI Put
vdai=daiputBSMFD(S0,K,sigma,r,D,T,sl,B,sr,N,M,theta);
%Festverzinsliche Komponente = FK
FK=Nominal*(1+C)*exp(-r*T);
n=Nominal/K;
%BRC
brc=FK-n*vdai;

```

Black-Scholes Europäischer Put Kalibrierung

```
function [sigma] = europutBSMKAL(s,r,d,D)
q=log(1+d/s);
m = length(D); rvec = zeros(m,1); J = zeros(m,1); V = zeros(m,1);
% Toleranz tol und Startwert fuer sigma
tol = 1e-10; sigma0 = 0.1; sigma1 = 0.4;
% So lange iterieren, bis Toleranz unterschritten wird
while abs(sigma0-sigma1) > tol
sigma0 = sigma1;
for j = 1:m
VM = D(j,1); K = D(j,2); T = D(j,3);
% Die Optionspreise
d1 = (log(s/K)+(0.5*sigma0^2+r-q)*T)/(sigma0*sqrt(T));
d2 = d1-sigma0*sqrt(T);
V(j) = -s.*exp(-q*T).*normcdf(-d1)+exp(-r*T)*K*normcdf(-d2);
% Der Vektor f und die Matrix dF
rvec(j) = V(j) - VM;
J(j) = s.*exp(-q*T).*sqrt(T).*normpdf(d1);
end
% Ein Newton-Schritt
sigma1 = sigma0 - J'*rvec/(J'*J);
end
sigma = sigma1;

%ARPE
dif=abs(V-D(:,1));
dif=dif./D(:,1);
ARPE=mean(dif)
```

Black-Scholes Europäischer Put implizierte Volatilität

```
function[implvola]=europutimplvolaBSMCF(V,S0,K,r,T,D)
tolerance=1e-15;
sigma0=0.1;
sigma1=0.7;
while abs(sigma0-sigma1)>tolerance
sigma0=sigma1;
q=log(1+D/S0);
d1=((log(S0/K)+(r-q+0.5*sigma0^2)*T)/(sigma0*(T)^0.5));
d2=d1-sigma0*T^0.5;
P=K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S0*exp(-q*T)*normcdf(-d1);
dV=S0*exp(-q*T)*T^0.5*normpdf(d1);
sigma1=sigma0-((P-V)/dV);
end
implvola=sigma1;
```

Heston Modell Europäische Optionen generell (closed Form)

```

function V = generellHMCf(S0,K,sigma,r,D,T,kappa,thetaHM,vol,rho,phi)
% Semi-Analytical implementation of the Heston model, using
the paper of A.
% Janek et. al: FX Smile in the Heston model
% phi is +1 for a call, -1 for a put
q=log(1+D/K);
sigma=sigma.^2;
% first variante: own integration based on Gaussian qudra-
ture
V = zeros(length(S0),length(sigma)); n = 800; R = 300;
[xg,w] = gauleg(n); u = R/2*(xg+1);

u1 = 0.5; u2 = -0.5; b1 = kappa-vol*rho; b2 = kappa;
d1 = sqrt((rho*vol*u*1i-b1).^2-vol^2*(2*u1*u*1i-u.^2));
d2 = sqrt((rho*vol*u*1i-b2).^2-vol^2*(2*u2*u*1i-u.^2));
g1 = (b1-rho*vol*u*1i-d1)./(b1-rho*vol*u*1i+d1);
g2 = (b2-rho*vol*u*1i-d2)./(b2-rho*vol*u*1i+d2);
C1 = (r-q)*u*1i*T+kappa*thetaHM/vol^2*((b1-rho*vol*u*1i-
d1)*T...
    -2*log((1-g1.*exp(-d1*T))./(1-g1)));
C2 = (r-q)*u*1i*T+kappa*thetaHM/vol^2*((b2-rho*vol*u*1i-
d2)*T...
    -2*log((1-g2.*exp(-d2*T))./(1-g2)));
D1 = 1/vol^2*(b1-rho*vol*u*1i-d1).*((1-exp(-d1*T))./(1-
g1.*exp(-d1*T)));
D2 = 1/vol^2*(b2-rho*vol*u*1i-d2).*((1-exp(-d2*T))./(1-
g2.*exp(-d2*T)));

for l = 1:length(S0)
    x = log(S0(l));
    for k = 1:length(sigma)
        f1 = exp(C1+D1.*sigma(k)+1i*u*x);
        f2 = exp(C2+D2.*sigma(k)+1i*u*x);
        P1 = 0.5+1/pi*R/2*sum(w.*real(exp(-
1i*u*log(K)).*f1./(1i*u)));
        P2 = 0.5+1/pi*R/2*sum(w.*real(exp(-
1i*u*log(K)).*f2./(1i*u)));
        Pp = (1-phi)/2+phi*P1; Pm = (1-phi)/2+phi*P2;
        V(l,k) = phi*(exp(-q*T)*S0(l)*Pp-K*exp(-r*T)*Pm);
    end
end

return

function [x,w] = gauleg(n)

```

```
x = zeros(n,1); w=zeros(n,1);
m = (n+1)/2; xm = 0.0; x1 = 1.0;
for i = 1:m
    z = cos(pi*(i-0.25)/(n+0.5));
    while 1
        p1 = 1.0; p2 = 0.0;
        for j = 1:n
            p3 = p2; p2 = p1; p1 = ((2.0*j-1.0)*z*p2-(j-
1.0)*p3)/j;
        end
        pp = n*(z*p1-p2)/(z*z-1.0); z1 = z; z = z1-p1/pp;
        if (abs(z-z1)<eps), break, end
    end
    x(i) = xm-x1*z; x(n+1-i) = xm+x1*z;
    w(i) = 2.0*x1/((1.0-z*z)*pp*pp); w(n+1-i) = w(i);
end
x = x'; w = w';
return
```

Heston Modell Europäischer Call (Finite-Differenzen-Methode)

```
function v = euro-
callHMF(D,S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,the-
taHM,vol,rho,theta)
%Definitionen
sigma=sigma^2;
h=(sr-sl)/(N+1);
j=(vmax-vmin)/(L+1);
k=T/M;
s=(sl:h:sr)';
q=log(1+D/S0);
g = @(s,v)max(s-K,0);
V=(vmin:j:vmax)';
% Koeffizienten
as = @(s)-1/2*s.^2; av = @(V)V;
bs = @(s)-rho*vol*s; bv = @(V)V;;
c = @(V)-1/2*vol^2*V;
d = @(s)-(r-q)*s;
e = @(V)-kappa*(thetaHM-V);
f = @(s)r*s.^0;
% Matrix A
Mas = zeros(N+2);
Mas(2,1) = as(s(2));
Mas(1,1:4) = [2*as(s(1)) -5*as(s(1)) 4*as(s(1)) -as(s(1))];
Mas(2:N+1,2:N+1) = spdiags([as(s(3:end)) -2*as(s(2:end-1))
as(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mas = Mas*1/h^2;
Mas = sparse(Mas);
Mav = spdiags(av(V(1:end)),0,L+2,L+2);
```

```

MA = kron(Mav,Mas);
Mbs = zeros(N+2);
Mbs(2,1) = -bs(s(2));
Mbs(1,1:3) = [-3*bs(s(1)) 4*bs(s(1)) -bs(s(1))];
Mbs(2:N+1,2:N+1)=spdiags([-bs(s(3:end)) 0*bs(s(2:end-1))
bs(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mbs=Mbs*1/(2*h);
Mbs=sparse(Mbs);
Mbv = zeros(L+2);
Mbv(2,1) = -bv(V(2));
Mbv(1,1:3) = [-3*bv(V(1)) 4*bv(V(1)) -bv(V(1))];
Mbv(2:L+1,2:L+1)=spdiags([-bv(V(3:end)) 0*bv(V(2:end-1))
bv(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mbv(L+2,L:L+2)=[1/2*bv(V(end)) -3*bv(V(end))
5/2*bv(V(end))];
Mbv(L+1,L+2)=bv(V(end-1));
Mbv=Mbv*1/(2*j);
Mbv=sparse(Mbv);
MB = kron(Mbv,Mbs);
Mcs = speye(N+2);
Mcv = zeros(L+2);
Mcv(2,1) = c(V(2));
Mcv(1,1:4) = [2*c(V(1)) -5*c(V(1)) 4*c(V(1)) -c(V(1))];
Mcv(2:L+1,2:L+1) = spdiags([c(V(3:end)) -2*c(V(2:end-1))
c(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mcv(L+2,L:L+2)=[1/2*c(V(end)) -c(V(end)) 1/2*c(V(end))];
Mcv(L+1,L+2)=c(V(end-1));
Mcv= Mcv *1/j^2;
Mcv=sparse(Mcv);
MC = kron(Mcv,Mcs);
Mds = zeros(N+2);
Mds(2,1) = -d(s(2));
Mds(1,1:3) = [-3*d(s(1)) 4*d(s(1)) -d(s(1))];
Mds(2:N+1,2:N+1)=spdiags([-d(s(3:end)) 0*d(s(2:end-1))
d(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mds=Mds*1/(2*h);
Mds=sparse(Mds);
Mdv = speye(L+2);
MD = kron(Mdv,Mds);
Mes = speye(N+2);
Mev = zeros(L+2);
Mev(2,1) = -e(V(2));
Mev(2:L+1,2:L+1) = spdiags([-e(V(3:end)) 0*e(V(2:end-1))
e(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mev(1,1:3) = [-3*e(V(1)) 4*e(V(1)) -e(V(1))];
Mev(L+2,L:L+2)=[1/2*e(V(end)) -3*e(V(end)) 5/2*e(V(end))];
Mev(L+1,L+2)=e(V(end-1));
Mev=Mev*1/(2*j);
Mev=sparse(Mev);

```

```
ME = kron(Mev,Mes);
Mfs = spdiags(f(s(1:end)),0,N+2,N+2); Mfv = speye(L+2);
MF = kron(Mfv,Mfs);
A = MA+MB+MC+MD+ME+MF;
%Erstellen des Vektors w
[s,V] = ndgrid(s(1:N+2),V(1:L+2));
w = g(s,V); w = w(:);
%Finale Berechnungen
I = speye(size(A));
links=I+k*theta*A;
rechts=I-k*(1-theta)*A;
for j = 1:M, w = links\(rechts*w); end
w=reshape(w,N+2,L+2);
v = interpn(s,V,w,S0,sigma);
```

Heston Modell Europäischer Put (Finite-Differenzen-Methode)

```
function v = europutH-
MFD(S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,thetaHM,vol,rho,theta)
%Definitionen
sigma=sigma^2;
h=(sr-sl)/(N+1);
j=(vmax-vmin)/(L+1);
k=T/M;
s=(sl:h:sr)';
q=log(1+D/S0);
g = @(s,v)max(K-s,0);
V=(vmin:j:vmax)';
% Koeffizienten
as = @(s)-1/2*s.^2; av = @(V)V;
bs = @(s)-rho*vol*s; bv = @(V)V;;
c = @(V)-1/2*vol^2*V;
d = @(s)-(r-q)*s;
e = @(V)-kappa*(thetaHM-V);
f = @(s)r*s.^0;
% Matrix A
Mas = zeros(N+2);
Mas(2,1) = as(s(2));
Mas(1,1:4) = [2*as(s(1)) -5*as(s(1)) 4*as(s(1)) -as(s(1))];
Mas(2:N+1,2:N+1) = spdiags([as(s(3:end)) -2*as(s(2:end-1))
as(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mas = Mas*1/h^2;
Mas = sparse(Mas);
Mav = spdiags(av(V(1:end)),0,L+2,L+2);
MA = kron(Mav,Mas);
Mbs = zeros(N+2);
Mbs(2,1) = -bs(s(2));
Mbs(1,1:3) = [-3*bs(s(1)) 4*bs(s(1)) -bs(s(1))];
```

```

Mbs(2:N+1,2:N+1)=spdiags([-bs(s(3:end)) 0*bs(s(2:end-1))
bs(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mbs=Mbs*1/(2*h);
Mbs=sparse(Mbs);
Mbv = zeros(L+2);
Mbv(2,1) = -bv(V(2));
Mbv(1,1:3) = [-3*bv(V(1)) 4*bv(V(1)) -bv(V(1))];
Mbv(2:L+1,2:L+1)=spdiags([-bv(V(3:end)) 0*bv(V(2:end-1))
bv(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mbv(L+2,L:L+2)=[1/2*bv(V(end)) -3*bv(V(end))
5/2*bv(V(end))];
Mbv(L+1,L+2)=bv(V(end-1));
Mbv=Mbv*1/(2*j);
Mbv=sparse(Mbv);
MB = kron(Mbv,Mbs);
Mcs = speye(N+2);
Mcv = zeros(L+2);
Mcv(2,1) = c(V(2));
Mcv(1,1:4) = [2*c(V(1)) -5*c(V(1)) 4*c(V(1)) -c(V(1))];
Mcv(2:L+1,2:L+1) = spdiags([c(V(3:end)) -2*c(V(2:end-1))
c(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mcv(L+2,L:L+2)=[1/2*c(V(end)) -c(V(end)) 1/2*c(V(end))];
Mcv(L+1,L+2)=c(V(end-1));
Mcv= Mcv *1/j^2;
Mcv=sparse(Mcv);
MC = kron(Mcv,Mcs);
Mds = zeros(N+2);
Mds(2,1) = -d(s(2));
Mds(1,1:3) = [-3*d(s(1)) 4*d(s(1)) -d(s(1))];
Mds(2:N+1,2:N+1)=spdiags([-d(s(3:end)) 0*d(s(2:end-1))
d(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mds=Mds*1/(2*h);
Mds=sparse(Mds);
Mdv = speye(L+2);
MD = kron(Mdv,Mds);
Mes = speye(N+2);
Mev = zeros(L+2);
Mev(2,1) = -e(V(2));
Mev(2:L+1,2:L+1) = spdiags([-e(V(3:end)) 0*e(V(2:end-1))
e(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mev(1,1:3) = [-3*e(V(1)) 4*e(V(1)) -e(V(1))];
Mev(L+2,L:L+2)=[1/2*e(V(end)) -3*e(V(end)) 5/2*e(V(end))];
Mev(L+1,L+2)=e(V(end-1));
Mev=Mev*1/(2*j);
Mev=sparse(Mev);
ME = kron(Mev,Mes);
Mfs = spdiags(f(s(1:end)),0,N+2,N+2); Mfv = speye(L+2);
MF = kron(Mfv,Mfs);
A = MA+MB+MC+MD+ME+MF;

```

```

%Erstellen des Vektors w
[s,V] = ndgrid(s(1:N+2),V(1:L+2));
w = g(s,V); w = w(:);
%Finale Berechnungen
I = speye(size(A));
links=I+k*theta*A;
rechts=I-k*(1-theta)*A;
for j = 1:M, w = links\(rechts*w); end
w=reshape(w,N+2,L+2);
v = interpn(s,V,w,S0,sigma);

```

Heston Modell Down-and-Out Put (Finite-Differenzen-Methode)

```

function v = dao-
putHMFD(S0,K,sigma,r,D,T,B,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,the-
taHM,vol,rho,theta)
%Definitionen
sigma=sigma^2;
h=(sr-B)/(N+1);
j=(vmax-vmin)/(L+1);
k=T/M;
s=(B:h:sr)';
q=log(1+D/S0);
g = @(s,V)max(K-s,0);
V=(vmin:j:vmax)';
% Koeffizienten
as = @(s)-1/2*s.^2; av = @(V)V;
bs = @(s)-rho*vol*s; bv = @(V)V;;
c = @(V)-1/2*vol^2*V;
d = @(s)-(r-q)*s;
e = @(V)-kappa*(thetaHM-V);
f = @(s)r*s.^0;
% Matrix A
Mas = spdiags([as(s(3:end)) -2*as(s(2:end-1)) as(s(1:end-
2))],[-1 0 1],N,N);
Mas = Mas*1/h^2;
Mav = spdiags(av(V(1:end)),0,L+2,L+2);
MA = kron(Mav,Mas);
Mbs=spdiags([-bs(s(3:end)) 0*bs(s(2:end-1)) bs(s(1:end-
2))],[-1 0 1],N,N);
Mbs=Mbs*1/(2*h);
Mbv = zeros(L+2);
Mbv(2,1) = -bv(V(2));
Mbv(1,1:3) = [-3*bv(V(1)) 4*bv(V(1)) -bv(V(1))];
Mbv(2:L+1,2:L+1)=spdiags([-bv(V(3:end)) 0*bv(V(2:end-1))
bv(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mbv(L+2,L:L+2)=[1/2*bv(V(end)) -3*bv(V(end))
5/2*bv(V(end))];
Mbv(L+1,L+2)=bv(V(end-1));

```

```

Mbv=Mbv*1/(2*j);
Mbv=sparse(Mbv);
MB = kron(Mbv,Mbs);
Mcs=speye(N);
Mcv = zeros(L+2);
Mcv(2,1) = c(V(2));
Mcv(1,1:4) = [2*c(V(1)) -5*c(V(1)) 4*c(V(1)) -c(V(1))];
Mcv(2:L+1,2:L+1) = spdiags([c(V(3:end)) -2*c(V(2:end-1))
c(V(1:end-2))], [-1 0 1], L, L);
Mcv(L+2,L:L+2)=[1/2*c(V(end)) -c(V(end)) 1/2*c(V(end))];
Mcv(L+1,L+2)=c(V(end-1));
Mcv= Mcv *1/j^2;
Mcv=sparse(Mcv);
MC = kron(Mcv,Mcs);
Mds=spdiags([-d(s(3:end)) 0*d(s(2:end-1)) d(s(1:end-2))], [-1 0 1], N, N);
Mds=Mds*1/(2*h);
Mdv = speye(L+2);
MD = kron(Mdv,Mds);
Mes=speye(N);
Mev = zeros(L+2);
Mev(2,1) = -e(V(2));
Mev(2:L+1,2:L+1) = spdiags([-e(V(3:end)) 0*e(V(2:end-1))
e(V(1:end-2))], [-1 0 1], L, L);
Mev(1,1:3) = [-3*e(V(1)) 4*e(V(1)) -e(V(1))];
Mev(L+2,L:L+2)=[1/2*e(V(end)) -3*e(V(end)) 5/2*e(V(end))];
Mev(L+1,L+2)=e(V(end-1));
Mev=Mev*1/(2*j);
Mev=sparse(Mev);
ME = kron(Mev,Mes);
Mfs = spdiags(f(s(2:end-1)),0,N,N); Mfv = speye(L+2);
MF = kron(Mfv,Mfs);
A = MA+MB+MC+MD+ME+MF;
%Erstellen des Vektors w
[s,V] = ndgrid(s(2:N+1),V(1:L+2));
w = g(s,V); w = w(:);
%Finale Berechnungen
I = speye(size(A));
links=I+k*theta*A;
rechts=I-k*(1-theta)*A;
for j = 1:M, w = links\(rechts*w); end
w=reshape(w,N,L+2);
v = interpn(s,V,w,S0,sigma);

```

Heston Modell BRC (Finite-Differenzen-Methode)

```

function [brc] = brcHMF(S0,K,sigma,r,D,T,Nominal,
C,sl,B,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,thetaHM,vol,rho,theta)
%DAI Put

```

```

europut=euro-
putHMFd(S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,the-
taHM,vol,rho,theta);
vdao=dao-
putHMFd(S0,K,sigma,r,D,T,B,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,the-
taHM,vol,rho,theta);
vdai=europut-vdao;
%Festverzinsliche Komponente = FK
FK=Nominal*(1+C)*exp(-r*T);
n=Nominal/K;
%BRC
brc=FK-n*vdai;

```

Heston Modell Europäischer Put Konvergenzanalyse

```

function d = europutHMFd-
Konv(S0,K,sigma,r,D,T,sl,sr,vmin,vmax,N,M,L,kappa,the-
taHM,vol,rho,theta,phi)
%Definitionen
sigma=sigma^2;
h=(sr-sl)/(N+1);
j=(vmax-vmin)/(L+1);
k=T/M;
s=(sl:h:sr)';
q=log(1+D/S0);
g=@(s,v)max(K-s,0);
V=(vmin:j:vmax)';
% Koeffizienten
as=@(s)-1/2*s.^2; av=@(V)V;
bs=@(s)-rho*vol*s; bv=@(V)V;
c=@(V)-1/2*vol^2*V;
d=@(s)-(r-q)*s;
e=@(V)-kappa*(thetaHM-V);
f=@(s)r*s.^0;
% Matrix A
Mas=zeros(N+2);
Mas(2,1)=as(s(2));
Mas(1,1:4)=[2*as(s(1)) -5*as(s(1)) 4*as(s(1)) -as(s(1))];
Mas(2:N+1,2:N+1)=spdiags([as(s(3:end)) -2*as(s(2:end-1))
as(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mas=Mas*1/h^2;
Mas=sparse(Mas);
Mav=spdiags(av(V(1:end)),0,L+2,L+2);
MA=kron(Mav,Mas);
Mbs=zeros(N+2);
Mbs(2,1)=-bs(s(2));
Mbs(1,1:3)=[-3*bs(s(1)) 4*bs(s(1)) -bs(s(1))];
Mbs(2:N+1,2:N+1)=spdiags([-bs(s(3:end)) 0*bs(s(2:end-1))
bs(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);

```

```

Mbs=Mbs*1/(2*h);
Mbs=sparse(Mbs);
Mbv = zeros(L+2);
Mbv(2,1) = -bv(V(2));
Mbv(1,1:3) = [-3*bv(V(1)) 4*bv(V(1)) -bv(V(1))];
Mbv(2:L+1,2:L+1)=spdiags([-bv(V(3:end)) 0*bv(V(2:end-1))
bv(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mbv(L+2,L:L+2)=[1/2*bv(V(end)) -3*bv(V(end))
5/2*bv(V(end))];
Mbv(L+1,L+2)=bv(V(end-1));
Mbv=Mbv*1/(2*j);
Mbv=sparse(Mbv);
MB = kron(Mbv,Mbs);
Mcs = speye(N+2);
Mcv = zeros(L+2);
Mcv(2,1) = c(V(2));
Mcv(1,1:4) = [2*c(V(1)) -5*c(V(1)) 4*c(V(1)) -c(V(1))];
Mcv(2:L+1,2:L+1) = spdiags([c(V(3:end)) -2*c(V(2:end-1))
c(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mcv(L+2,L:L+2)=[1/2*c(V(end)) -c(V(end)) 1/2*c(V(end))];
Mcv(L+1,L+2)=c(V(end-1));
Mcv= Mcv *1/j^2;
Mcv=sparse(Mcv);
MC = kron(Mcv,Mcs);
Mds = zeros(N+2);
Mds(2,1) = -d(s(2));
Mds(1,1:3) = [-3*d(s(1)) 4*d(s(1)) -d(s(1))];
Mds(2:N+1,2:N+1)=spdiags([-d(s(3:end)) 0*d(s(2:end-1))
d(s(1:end-2))],[-1 0 1],N,N);
Mds=Mds*1/(2*h);
Mds=sparse(Mds);
Mdv = speye(L+2);
MD = kron(Mdv,Mds);
Mes = speye(N+2);
Mev = zeros(L+2);
Mev(2,1) = -e(V(2));
Mev(2:L+1,2:L+1) = spdiags([-e(V(3:end)) 0*e(V(2:end-1))
e(V(1:end-2))],[-1 0 1],L,L);
Mev(1,1:3) = [-3*e(V(1)) 4*e(V(1)) -e(V(1))];
Mev(L+2,L:L+2)=[1/2*e(V(end)) -3*e(V(end)) 5/2*e(V(end))];
Mev(L+1,L+2)=e(V(end-1));
Mev=Mev*1/(2*j);
Mev=sparse(Mev);
ME = kron(Mev,Mes);
Mfs = spdiags(f(s(1:end)),0,N+2,N+2); Mfv = speye(L+2);
MF = kron(Mfv,Mfs);
A = MA+MB+MC+MD+ME+MF;
%Erstellen des Vektors w
[s,V] = ndgrid(s(1:N+2),V(1:L+2));

```

```
w = g(s,V); w = w(:);
%Finale Berechnungen
I = speye(size(A));
links=I+k*theta*A;
rechts=I-k*(1-theta)*A;
for j = 1:M, w = links\(rechts*w); end
wFD=reshape(w,N+2,L+2);
wFD=wFD(2:(N+2)/2,2:(L+2)/2);
sCF=s(2:(N+2)/2,1);
VCF=V(1,2:(L+2)/2)'.^0.5;
wCF= generellHMCF(sCF,K,VCF,r,D,T,kappa,thetaHM,vol,rho,phi);
d=max(max(abs(wCF-wFD)));
```

Matlab Codes zur Generierung von Abbildungen

Abbildung 2: Preis- und Auszahlungsfunktion einer europäischen Put Option

Im Anschluss an die Routine: `europutBSMFD`:

```
plot(s(2:end-1),max(K-s(2:end-1),0),'-k;Auszahlungsfunktion;', "markersize",25,s(2:end-1),w,'-b;Derivativpreise;', "markersize",25)
```

Abbildung 3: Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im BSM

Im Anschluss an die Generierung der Differenzen im Vektor `d`:

```
loglog(N,d,'-k;Differenz;', "markersize",25)
```

Abbildung 4: Derivativpreis einer europäischen Put Option im Heston Modell

Im Anschluss an die Routine: `europutHMFD`:

```
mesh(s,V,w)
```

Abbildung 5: Konvergenz der Finiten-Differenzen-Methode im Heston Modell

Im Anschluss an die Generierung der Differenzen im Vektor `d`:

```
loglog(N,d,'-k;Differenz;', "markersize",25)
```

Abbildung 7: Vergleich Modell- und Marktpreise zur Kalibrierung im BSM

Im Anschluss an die Routine: `europutBSMKAL`:

```
plot(D(:,2),D(:,1),'ko;Marktpreise;',D(:,2),V,'rx;BSM;')
```

Abbildung 8: Vergleich Modell- und Marktpreise zur Kalibrierung im Heston Modell

Im Anschluss an die Generierung der Matrix `v` mit den Spalten 1: Marktpreise; 2: Ausübungspreise; 3: Heston Preise:

```
plot(v(:,2),v(:,1),'ko;Marktpreise;',v(:,2),v(:,4),'rx;Heston Modell;')
```

Abbildung 9: Derivatивpreise einer Down-and-Out Put Option im Heston Modell

Im Anschluss an die Routine: `daoputhMFD`:

```
mesh(s,V,w)
```

Abbildung 10: Plain Vanilla Marktpreise im Vergleich mit den Modellbewertungen

Im Anschluss an die Generierung der Matrix `v` mit den Spalten 1: Marktpreise; 2: Ausübungspreise; 3: Laufzeiten; 4: Heston Preise; 5: BSM Preise:

```
plot(v(1:15,2),v(1:15,1),"xk;MARKET;", "markersize",25,  
v(1:15,2),v(1:15,4),"or;HESTON;", "markersize",25,v(1:15,2),  
v(1:15,5),"+g;BSM;", "markersize",25)
```

Abbildung 11: Volatilitäts-Smile Markt- und Modellpreise (T=15. Dezember 2017)

Im Anschluss an die Generierung der Matrix `IV` mit den Spalten 1: Ausübungspreise; 2: implizierte Volatilitäten aus Marktpreisen; 3: implizierte Volatilitäten aus Heston Preisen:

```
plot(IV(1:15,1),IV(1:15,2),"-k;MARKET;", "markersize",25,IV(  
1:15,1),IV(1:15,3), "-r;HESTON;", "markersize",25)
```

Abbildung 12: Volatilitäts-Smile Markt- und Modellpreise (T=15. Juni 2018)

Im Anschluss an die Generierung der Matrix `IV` mit den Spalten 1: Ausübungspreise; 2: implizierte Volatilitäten aus Marktpreisen; 3: implizierte Volatilitäten aus Heston Preisen:

```
plot(IV(16:end,1),IV(16:end,2),"-k;MARKET;", "markersize",  
25,IV(16:end,1),IV(1:15,3), "-r;HESTON;", "markersize",25)
```


Factsheet des BRC



Termsheet (Final Terms)

Defender Vonti

SVSP-BEZEICHNUNG: BARRIER REVERSE CONVERTIBLE (1230)

Vontobel Investment Banking

+41 (0)58 283 78 88 oder www.derinet.com

4.55% (4.24% p.a.) Defender Vonti auf ABB Ltd

PRODUKTBESCHREIBUNG

Diese Produkte zeichnen sich durch einen oder mehrere garantierte Coupons, eine Barriere sowie eine – allerdings nur bedingte – Rückzahlung zum Nennwert aus. Die Bestimmung der Rückzahlung am Ende der Laufzeit erfolgt in Abhängigkeit von der Kursentwicklung und der Schlussfixierung des Basiswerts: Eine Rückzahlung zum Nennwert ist gewährleistet, solange der Basiswert die Barriere während der massgeblichen Barrierenbeobachtung nicht berührt hat. Hat der Basiswert die Barriere zwar berührt, ist dieser bei Schlussfixierung aber wieder höher oder gleich wie der Ausübungspreis, wird der Nennwert zurückbezahlt. Hat jedoch der Basiswert während der Barrierenbeobachtung die Barriere berührt und ist bei Schlussfixierung tiefer als der Ausübungspreis, erhält der Anleger die Lieferung des Basiswerts oder eine Barabgeltung, die dem Schlussfixierungskurs des Basiswerts entspricht (Details siehe "Rückzahlung/Lieferung").

Diese Finanzinstrumente gelten in der Schweiz als Strukturierte Produkte. Sie sind keine kollektiven Kapitalanlagen im Sinne des Bundesgesetzes über die kollektiven Kapitalanlagen (KAG) und unterstehen deshalb nicht der Bewilligung und der Aufsicht der Eidgenössischen Finanzmarktaufsicht FINMA. Der Anleger trägt das Bonitätsrisiko der Emittentin bzw. der Garantin.

Produktinformation

Emittentin	Vontobel Financial Products Ltd., DIFC Dubai (untersteht keiner prudentiellen Aufsicht und verfügt über kein Rating)	
Keep-Well Agreement	Mit der Bank Vontobel AG, Zurich (untersteht der Aufsicht der Eidgenössischen Finanzmarktaufsicht FINMA, Moody's Counterparty Risk Assessment A2 (cr); siehe dessen vollständigen Wortlaut im Emissionsprogramm)	
Garantin	Vontobel Holding AG, Zurich (Moody's A3)	
Lead Manager	Bank Vontobel AG, Zurich	
Zahl-, Ausübungs- und Berechnungsstelle	Bank Vontobel AG, Zurich	
SVSP Produkttyp	Barrier Reverse Convertible (1230), vgl. auch www.svsp-verband.ch	
Basiswert	ABB Ltd (weitere Angaben zum Basiswert unten)	
	Spot Referenzpreis	CHF 22.83
	Ausübungspreis	CHF 22.83 (100.00% des Spot Referenzpreises)
	Barriere	CHF 17.12 (75.00% des Spot Referenzpreises)
	Anzahl Basiswerte	43.80201 (Nachkommastellen werden in bar abgegolten, keine Kumulierung)
Emissionspreis	100.00% des Nennwerts	
Nennwert	CHF 1'000.00	
Barrierebeobachtung	20. Januar 2017 bis 16. Februar 2018, kontinuierliche Beobachtung	
Coupon	4.55% (4.2400% p.a.) - einmalig, 30/360 (Anzahl Tage: 386)	
Zinsanteil	0.0000% (Prämienanteil: 4.5500%)	
Anfangsfixierung	20. Januar 2017; Schlusskurs an der Referenzbörse	
Liberierung	27. Januar 2017	
Letzter Handelszeitpunkt	16. Februar 2018 (17:00 Uhr Ortszeit Zürich)	
Schlussfixierung	16. Februar 2018; Schlusskurs an der Referenzbörse	
Rückzahlung	23. Februar 2018	
Referenzwährung	CHF; Emission, Handel und Rückzahlung erfolgen in der Referenzwährung	

CH-Valorenummer / ISIN / Symbol	34839765 / CH0348397651 / RABAFV
Rückzahlung / Lieferung	<ul style="list-style-type: none"> - Wenn während der Barrierenbeobachtung der Basiswert niemals die Barriere berührt oder durchbricht, wird der Nennwert zurückbezahlt - zuzüglich zum Coupon. - Berührt oder durchbricht der Basiswert jedoch während der Barrierenbeobachtung die Barriere, wird wie folgt zurückbezahlt: <ol style="list-style-type: none"> 1. Wenn die Schlussfixierung des Basiswerts höher oder gleich wie der Ausübungspreis ist, wird der Nennwert zurückbezahlt. Ausserdem ist am Verfalltag der Coupon fällig. 2. Wenn die Schlussfixierung des Basiswerts tiefer als der Ausübungspreis ist, erfolgt die physische Lieferung der festgelegten Anzahl Basiswerte; dabei werden Nachkommastellen nicht kumuliert und in bar abgeholt. Ausserdem ist am Verfalltag der Coupon fällig.
Weitere Informationen	
Emissionsvolumen	CHF 30'000'000, mit Erhöhungsmöglichkeit
Titel	Die Strukturierten Produkte werden als nicht verurkundete Wertrechte der Emittentin emittiert. Keine Urkunden, kein Titeldruck.
Verwahrungsstelle	SIX SIS AG
Clearing / Settlement	SIX SIS AG, Euroclear Brussels, Clearstream (Luxembourg)
Anwendbares Recht / Gerichtsstand	Schweizer Recht / Zürich 1, Schweiz
Publikation von Mitteilungen und Anpassungen	Alle die Produkte betreffenden Mitteilungen an die Investoren und Anpassungen der Produktbedingungen (z.B. aufgrund von Corporate Actions) werden unter der zum Produkt gehörenden "Produktgeschichte" auf www.derinet.com publiziert. Bei an der SIX Swiss Exchange kotierten Produkten ausserdem nach den geltenden Vorschriften unter www.six-swiss-exchange.com publiziert.
Vorzeitige Kündigung	Nur aus steuerlichen oder anderen ausserordentlichen Gründen möglich sowie im Falle keiner ausstehenden Bestände (wie im Emissionsprogramm näher beschrieben).
Sekundärmarkthandel	Der Sekundärhandel wird während der gesamten Laufzeit gewährleistet. Indikative Tageskurse dieses Produktes sind über www.derinet.com erhältlich.
Preisstellung	Die Preisstellung im Sekundärmarkt erfolgt "clean", d.h. der aufgelaufene Zins ist im Preis nicht inbegriffen.
Kotierung	Wird an der SIX Swiss Exchange beantragt.
Minimale Investition	CHF 1'000.00 Nennwert
Minimale Handelsmenge	CHF 1'000.00 Nennwert
Gebührenkennzahlen	Der von Vontobel gerechnete Issuer Estimated Value (IEV) dieses Produkts beträgt 98.36%, woraus sich eine Total Expense Ratio (TER) von 1.53% p.a. ergibt. In dieser TER sind Vertriebsgebühren bis zu 0.70% p.a. enthalten.
Prudentielle Aufsicht	Die Bank Vontobel AG untersteht als prudentiell beaufsichtigte Bank der Einzelinstitutsaufsicht, die Vontobel Holding AG und die Vontobel Financial Products Ltd. als Gruppengesellschaften der ergänzenden, konsolidierten Gruppenaufsicht durch die Eidgenössische Finanzmarktaufsicht FINMA. Vontobel Financial Products Ltd. ist im Register des Dubai International Finance Centre als non-regulated Company eingetragen. Weder bei der Vontobel Financial Products Ltd. noch bei der Vontobel Holding AG handelt es sich um prudentiell beaufsichtigte Finanzintermediäre im Sinne von Art. 5 Abs. 1 Bst. a Ziff. 1.-4. KAG.
Steuerliche Behandlung in der Schweiz	
Einkommensteuer	Dieses Produkt gilt als transparent und überwiegend einmalverzinslich (IUP). Der direkten Bundessteuer unterliegt der für die Haltedauer auf der Bondkomponente des Produktes ermittelte Ertrag (modifizierte Differenzbesteuerung).
Verrechnungssteuer	Keine Verrechnungssteuer
Emissionsabgabe	Keine Emissionsabgabe
Umsatzabgabe	Sekundärmarkttransaktionen unterliegen der schweizerischen Umsatzabgabe (TK22). Ist eine Lieferung des Basiswerts vorgesehen, kann darauf ebenfalls die Umsatzabgabe anfallen.
Allgemeine Hinweise	Transaktionen und Zahlungen im Rahmen dieses Produkts können sonstigen (ausländischen) Transaktionssteuern, Abgaben und/ oder Quellensteuern unterliegen, insbesondere einer Quellensteuer nach Abschnitt 871(m) des US-Bundessteuergesetzes (Internal Revenue Code). Sämtliche Zahlungen aus diesem Produkt erfolgen nach Abzug allfälliger Steuern und Abgaben. Ausländische Steuern und Abgaben, die im Zusammenhang mit der Lieferung des Basiswertes anfallen können, sind vom Anleger zu übernehmen.

Die weiteren Seiten des Factsheets dieses BRC enthalten weitere, für den Investor durchaus relevante Informationen. Sie sind allerdings für die Bewertung des BRC irrelevant. Das komplette Factsheet kann beim Autor auf Anfrage angefordert werden.

Marktoptionspreise

Tabelle 15: Marktoptionspreise für die Kalibrierung der Modelle

Ausübungspreis	Geldkurs	Briefkurs	Mittelkurs	Verfall
12	0.01	0.15	0.08	15.12.2017
14	0.05	0.17	0.11	15.12.2017
16	0.20	0.27	0.235	15.12.2017
17	0.31	0.37	0.34	15.12.2017
18	0.42	0.5	0.46	15.12.2017
19	0.62	0.69	0.655	15.12.2017
20	0.87	0.95	0.91	15.12.2017
20.5	1.03	1.11	1.07	15.12.2017
21	1.23	1.29	1.26	15.12.2017
22	1.69	1.73	1.71	15.12.2017
23	2.16	2.27	2.215	15.12.2017
24	2.79	2.91	2.85	15.12.2017
26	4.32	4.47	4.395	15.12.2017
28	6.11	6.28	6.195	15.12.2017
30	8.03	8.44	8.235	15.12.2017
10	0.03	0.08	0.055	15.06.2018
12	0.09	0.15	0.12	15.06.2018
14	0.21	0.28	0.245	15.06.2018
16	0.44	0.52	0.48	15.06.2018

Anhang

18	0.83	0.92	0.875	15.06.2018
19	1.12	1.21	1.165	15.06.2018
20	1.47	1.56	1.515	15.06.2018
21	1.85	1.99	1.92	15.06.2018
22	2.42	2.51	2.465	15.06.2018
24	3.69	3.83	3.76	15.06.2018
28	7.00	7.23	7.115	15.06.2018